Temps d'attente
Lois continues
Correction

∽

Exercice 1 (Loi géométrique)

1. Les valeurs prises par X sont tous les entiers supérieurs ou égaux à 1, que l'on peut noter $\mathbb{N}^\star$.
2. On a : $\mathbb{P}(X=1)=p=0{,}25=\dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X=2)=(1-p)p=0{,}75\times 0{,}25=\dfrac{3}{16}$
   puis $\mathbb{P}(X=3)=(1-p)^2\times p=0{,}75^2\times 0{,}25=\dfrac{9}{64}$.
3. Le cours donne $\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}\times p=\dfrac{3^{k-1}}{4^k}$ pour $k\in\mathbb{N}^\star$.

   Le cours donne aussi $E(X)=\dfrac{1}{p}=4$.
4. On peut considérer par exemple l'expérience qui consiste à essayer d'atteindre le centre d'une cible (avec un arc). Si l'on considère que la probabilité d'atteindre de centre est de 0,25, alors X représente de nombre de tentatives nécessaires pour atteindre la cible.

Exercice 2 (Loi géométrique)

1. On a : $\mathbb{P}(X=4)=(1-p)^3\times p=0{,}7^3\times 0{,}3=0{,}1029\simeq 0{,}103$ (arrondi demandé au millième),
   $\mathbb{P}(X\leqslant 2)=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=p+(1-p)\times p=0{,}3+0{,}7\times 0{,}3=0{,}51$
   et $\mathbb{P}(X>3)=1-\mathbb{P}(X\leqslant 3)=1-(\mathbb{P}(X\leqslant 2)+\mathbb{P}(X=3))=1-(0{,}51+0{,}7^2\times 0{,}3)=0{,}343$
   On peut obtenir ces valeurs avec la calculatrice. Pour le dernier cas, $\mathbb{P}(X>3)=\mathbb{P}(X\geqslant 4)$.
2. Le cours donne la formule : $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{0{,}3}=\dfrac{10}{3}\simeq 3{,}333$.

Exercice 3 (Loi géométrique)
On donnera ici arbitrairement les arrondis à 10^{-4} près.

1. Le temps moyen est l'inverse du paramètre de la loi : $E(T)=\dfrac{1}{p}=3$.

   Ainsi, le paramètre p vaut $p=\dfrac{1}{3}$.
2. On veut $\mathbb{P}(1\leqslant T\leqslant 3)$.
   La calculatrice donne : $\mathbb{P}(1\leqslant T\leqslant 3)\simeq 0{,}7037$
3. Ici on veut : $\mathbb{P}(T\geqslant 5)\simeq 0{,}1975$

Exercice 4 (Loi géométrique)

1. Pour chaque essai, on choisit toujours au hasard une clé parmi les 10. La variable X est le nombre de tentatives pour avoir un succès.

   La variable aléatoire X suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{10}=0{,}1$.
2. On veut $\mathbb{P}(X=1)=p=0{,}1$.

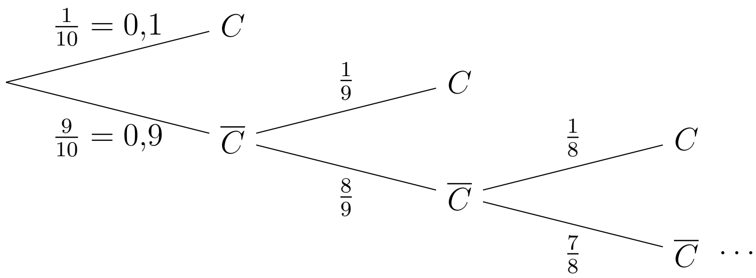
3. On veut :

$$\mathbb{P}(X>2) = 1-\mathbb{P}(X\leqslant 2) = 1-(\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2))$$
$$= 1-(p+(1-p)p) = 1-(0{,}1+0{,}9\times 0{,}1) = 0{,}81$$

   On peut aussi faire (et utiliser la calculatrice pour la dernière valeur) :
   $\mathbb{P}(X>2) = \mathbb{P}(X\geqslant 3) = 0{,}81$.
   Il s'agit de la probabilité qu'il trouve la bonne clé après la seconde tentative.

4. Première manière, à l'aide de la formule des probabilités conditionnelles :
   $\mathbb{P}_{X>5}(X>8) = \dfrac{\mathbb{P}(5<X \text{ et } X>8)}{\mathbb{P}(X>5)} = \dfrac{\mathbb{P}(X>8)}{\mathbb{P}(X>5)} = \dfrac{\mathbb{P}(X\geqslant 9)}{\mathbb{P}(X\geqslant 6)}$
   La calculatrice donne : $\dfrac{\mathbb{P}(X\geqslant 9)}{\mathbb{P}(X\geqslant 6)} \simeq \dfrac{0{,}4305}{0{,}59049} \simeq 0{,}729$
   Seconde manière, en utilisant la propriété de loi sans mémoire :
   $\mathbb{P}_{X>5}(X>8) = \mathbb{P}_{X>5}(X>5+3) = \mathbb{P}(X>3) = \mathbb{P}(X\geqslant 4) \simeq 0{,}729$.
   Interprétation : la probabilité que le nombre de tentatives dépasse 8 alors qu'il dépasse déjà 5 est de 0,729.
   Cette valeur est la même que la probabilité que le nombre de tentatives dépasse 3.

5. Ici il n'y a plus une loi géométrique, puisque l'on ne remet pas la clé utilisée.
   Il faut effectivement s'aider d'un arbre, sachant qu'à chaque tentative, le nombre de clé diminue de 1, ce qui augmente la probabilité de prendre la bonne clé à la tentative suivante.
   Chaque niveau de l'arbre correspond à une tentative. On note C le fait qu'il ait choisi la bonne clé.



   L'arbre est plus grand (bien que pas infini contrairement à la loi géométrique), mais on souhaite seulement la probabilité P d'ouvrir la porte au troisième essai.
   D'après l'arbre, on a donc : $P = \dfrac{9}{10}\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ (les 9 et les 8 se simplifient).
   Cette valeur (0,1) est en fait la même pour chaque branche se terminant par C (la somme totale valant 1).

Exercice 5 (Loi géométrique)

1. La probabilité que Marie tire une pièce avec une face étrangère au premier tirage est $p=\dfrac{16}{100}$ parce que le tirage est effectué au hasard (même probabilité pour chaque pièce d'être obtenue au tirage)
2. (a) Comme les tirages sont indépendants et identique (avec remise), la variable X suit la loi géométrique de paramètre p.
   (b) On veut $\mathbb{P}(X=3) = (1-p)^2\times p = \dfrac{84^2\times 16}{100^3} = \dfrac{1764}{15625} = 0{,}112896$.
   (c) À l'aide de la calculatrice : $\mathbb{P}(X\leqslant 2) = 0{,}2944$.
   Il s'agit de la probabilité qu'elle tombe sur une pièce étrangère au cours des deux premiers tirages.

(d) En utilisant la propriété de loi sans mémoire :
$\mathbb{P}_{X>3}(X > 5) = \mathbb{P}_{X>3}(X > 3+2) = \mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X \geqslant 3) = 0{,}7056$.
Il s'agit de la probabilité qu'elle doive réaliser plus que 5 tentatives en sachant qu'elle en a réalisé plus que 3 pour obtenir une pièce étrangère.

Exercice 6 (Loi géométrique)
Il s'agit de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) \leqslant 0{,}01 &\Leftrightarrow (1-p)^{k-1}p \leqslant 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow 0{,}7^{k-1}0{,}3 \leqslant 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow 0{,}7^{k-1} \leqslant \frac{0{,}01}{0{,}3} \\
&\Leftrightarrow 0{,}7^{k-1} \leqslant \frac{1}{30} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0{,}7^{k-1}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{30}\right) \\
&\Leftrightarrow (k-1)\ln(0{,}7) \leqslant -\ln(30) && \left(\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)\right) \\
&\Leftrightarrow k-1 \geqslant \frac{-\ln(30)}{\ln(0{,}7)} && (0 < 0{,}7 < 1 \text{ donc } \ln(0{,}7) < 0) \\
&\Leftrightarrow k \geqslant 1 + \frac{-\ln(30)}{\ln(0{,}7)} \\
&\Leftrightarrow k \geqslant 9{,}536
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 10$, on a $\mathbb{P}(X=k) \leqslant 0{,}01$.

Exercice 7 (Lois continues)
Il faut trois conditions pour qu'une fonction soit une densité.
Les fonctions proposées en respectent toutes l'une des trois : elles sont continues (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs).
Toutes sauf une (1.(c) comme nous le verrons) sont positives sur l'intervalle considéré.
Il reste donc à vérifier si l'intégrale sur l'intervalle de définition vaut 1.

1. (a) $f(x) = \frac{2}{15}x$. Une primitive de f est F définie par $F(x) = \frac{1}{15}x^2$.
Ainsi, $\int_1^4 f(t)dt = F(4) - F(1) = \frac{1}{15}(4^2 - 1^2) = \frac{15}{15} = 1$.
f est bien une fonction de densité sur $[1;4]$.
(b) $g(x) = \frac{1}{21}x^2$. Une primitive de g est G définie par $G(x) = \frac{1}{63}x^3$.
Ainsi, $\int_1^4 g(t)dt = G(4) - G(1) = \frac{1}{63}(4^3 - 1^3) = \frac{63}{63} = 1$
g est bien une fonction de densité sur $[1;4]$.
(c) $h(x) = 2x - 5$ n'est pas toujours positive. Par exemple, $h(1) = -3 < 0$.
Donc h ne peut pas être une densité de probabilité sur $[1;4]$.
(d) $i(x) = 4x^3$. Une primitive de i est I définie par $I(x) = x^4$.
Ainsi, $\int_1^4 i(t)dt = I(4) - I(1) = (4^4 - 1^4) = 255 \neq 1$
i n'est pas une fonction de densité sur $[1;4]$.
2. On rappelle que les intégrales de fonctions positives correspondent à des aires de surface.
Nous calculerons donc celles-ci avec ce point de vue.

(a) L'intégrale vaut $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ (aire d'un rectangle), donc la fonction est bien une densité.

(b) L'intégrale vaut $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ (aire d'un triangle), donc la fonction est bien une densité.

(c) L'intégrale vaut $\frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 = 1$ (aire de deux rectangles), donc la fonction est bien une densité.

Exercice 8 (Lois continues)

1. Les fonctions sont bien positives et continues sur $[-1; 1]$.
   Il reste à déterminer l'intégrale. Comme pour l'exercice précédent, on utilise les aires de surfaces.
   Pour f : $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ et pour g : $\frac{2 \times 2}{2} = 1$.
   Il s'agit dans les deux cas d'un triangle de base 2 et de hauteur 1.
   Les deux fonctions sont donc bien des fonctions de densité.
2. On obtient les résultats suivants par des considérations géométrique.
   (a) $\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 0) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ (triangle)
   (b) $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \frac{0{,}5 \times (1 + 0{,}5)}{2} = \frac{3}{8}$ (trapèze rectangle)
   (c) $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ (triangle)
   C'est aussi $1 - \mathbb{P}(-1 \leqslant X < 0)$ (événement contraire de (a)).
   (d) $\mathbb{P}(-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = 2 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ (surface double de (b))
3. (a) $\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 0) = \frac{1 \times (1 + 0{,}5)}{2} = \frac{3}{4}$ (trapèze rectangle)
   (b) $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \frac{0{,}5 \times (0{,}5 + 0{,}25)}{2} = \frac{3}{16}$ (trapèze rectangle)
   (c) $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \frac{1 \times 0{,}5}{2} = \frac{1}{4}$ (triangle)
   C'est aussi $1 - \mathbb{P}(-1 \leqslant X < 0)$ (événement contraire de (a)).
   (d) $\mathbb{P}(-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \frac{1 \times (0{,}75 + 0{,}25)}{2} = \frac{1}{2}$ (trapèze rectangle)

Exercice 9 (Loi uniforme)

1. On veut $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(-1 \leqslant X < 2) = \frac{2 - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
2. On veut $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{5 - 3}{5 - (-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
3. On veut $\mathbb{P}_{X>0}(X < 2) = \frac{\mathbb{P}(0 < X < 2)}{\mathbb{P}(X > 0)} = \frac{\mathbb{P}(0 < X < 2)}{\mathbb{P}(0 < X \leqslant 5)} = \cdots = \frac{2}{5}$
   (les dénominateurs des deux probabilités se simplifient dans leur quotient)

Exercice 10 (Loi uniforme)

1. La variable aléatoire D suit la loi uniforme sur $[0; 25]$.
2. La longueur de l'intervalle $[0; 25]$ est 25, donc la fonction densité de D est (formule de cours) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 25 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3. On veut $\mathbb{P}(X < 8) = \mathbb{P}(0 \leqslant X < 8) = \dfrac{8-0}{25} = \dfrac{8}{25}$.
4. On veut $\mathbb{P}_{X>12}(X < 20) = \dfrac{\mathbb{P}(12 < X < 20)}{\mathbb{P}(12 < X)} = \dfrac{\mathbb{P}(12 < X < 20)}{\mathbb{P}(12 < X < 25)} = \dfrac{8}{13}$.

Exercice 11 (Loi uniforme – facultatif)

1. La densité de probabilité f associée à X est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b (x \times f(x))dx \\
&= \int_a^b \left(x \times \frac{1}{b-a}\right) dx \\
&= \frac{1}{b-a} \times \int_a^b x dx && \text{(linéarité)} \\
&= \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b && \text{(expression de la primitive)} \\
&= \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} && \text{(identité remarquable)} \\
&= \frac{(b+a)}{2} && \text{(simplification)}
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien la formule du cours.

3. De manière similaire :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_a^b (x^2 \times f(x))dx - (E(X))^2 \\
&= \frac{1}{b-a} \times \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{(b+a)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b - \frac{(b+a)^2}{4} \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} \\
&= \frac{4(b^3 - a^3)}{12(b-a)} - \frac{3(b-a)(b+a)^2}{12(b-a)} \\
&= \frac{4(b^3 - a^3) - 3(b-a)(b+a)^2}{12(b-a)}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
4(b^3-a^3)-3(b-a)(b+a)^2 &= 4b^3-4a^3-3(b-a)(b^2+2ab+a^2)\\
&= 4b^3-4a^3-3(b^3+2ab^2+a^2b-ab^2-2a^2b-a^3)\\
&= 4b^3-4a^3-3b^3-6ab^2-3a^2b+3ab^2+6a^2b+3a^3\\
&= b^3+3a^2b-3ab^2-a^3
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
(b-a)^3 &= (b-a)(b-a)^2\\
&= (b-a)(b^2-2ab+a^2)\\
&= b^3-2ab^2+a^2b-ab^2+2a^2b-a^3\\
&= b^3+3a^2b-3ab^2-a^3
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)}\\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

Exercice 12 (Loi exponentielle)
On modélise la durée de vie, en heure, d'un transistor par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2{,}5 \times 10^{-5}$.

1. La densité de probabilité de T est définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 2{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{e}^{-2{,}5\times 10^{-5}x}$
   On a $f(0) = \lambda = 2{,}5 \times 10^{-5}$
   D'après le cours, $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{2{,}5\times 10^{-5}} = \dfrac{2}{5} \times 10^5 = 0{,}4 \times 10^5 = 4\,000$.
2. On a $\mathbb{P}(T \leqslant 15\,000) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\times 15\,000} = 1 - \mathrm{e}^{-2{,}5\times10^{-5}\times 15\,000} \simeq 0{,}31271$
   Il s'agit de la probabilité que le transistor fonctionnemoins de 15 000 heures.
   Ensuite, $\mathbb{P}(T > 50\,000) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 50\,000} = \mathrm{e}^{-2{,}5\times10^{-5}\times 50\,000} \simeq 0{,}2865$
   Il s'agit de la probabilité que le transistor fonctionne plus que 50 000 heures.
   Enfin, $\mathbb{P}(10\,000 \leqslant T \leqslant 30\,000) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 10\,000} - \mathrm{e}^{-\lambda\times 30\,000} = \cdots \simeq 0{,}3064$.
   Il s'agit de la probabilité que le transistor ait une durée de vie entre 10 000 et 30 000 heures.

Exercice 13 (Loi exponentielle)

1. On nous donne $\mathbb{P}(T \leqslant 4) = 0{,}565$.
   On résout donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leqslant 4) = 0{,}565 &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\times 4} = 0{,}565\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-4\lambda} = 1 - 0{,}565 = 0{,}435\\
&\Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0{,}435)\\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}435)}{-4} \simeq 0{,}208
\end{aligned}$$

2. (a) On veut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{T>4}(T > 8) &= \mathbb{P}_{T>4}(T > 4+4)\\
&= \mathbb{P}(T > 4) && \text{(durée de vie sans vieillissement)}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda\times 4}\\
&= \mathrm{e}^{-0{,}208\times 4}\\
&\simeq 0{,}435
\end{aligned}$$

(b) La durée de vie moyenne est l'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \simeq \dfrac{1}{0{,}208} \simeq 4{,}808$ (soit un peu moins de 5 ans).

(c) On résout :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t_0) = 0{,}75 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t_0} = 0{,}75 \\ &\Leftrightarrow -\lambda t_0 = \ln(0{,}75) \\ &\Leftrightarrow t_0 = -\frac{\ln(0{,}75)}{\lambda} \simeq -\frac{\ln(0{,}75)}{0{,}208} \simeq 1\end{aligned}$$

Cela signifie que trois-quart (0,75) des batteries lithium-ion fabriquées par l'usine durent plus d'un an.

Exercice 14 (Loi exponentielle)

1. On nous donne $E(X) = 7{,}5$ Or $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, donc $\lambda = \dfrac{1}{7{,}5} = \dfrac{2}{15} \simeq 0{,}133$.
2. On veut $\mathbb{P}(X > 5) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 5} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} \simeq 0{,}513$.
3. On veut $\mathbb{P}_{X>4}(X > 9) = \mathbb{P}(X > 5) \simeq 0{,}513$ (durée de vie sans vieillissement).
4. On veut $\mathbb{P}(6 < X < 10) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 6} - \mathrm{e}^{-\lambda\times 10} \simeq 0{,}186$.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

   (a) On considère l'expérience qui consiste à observer le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques.. Le succès est « obtenir un temps de fonctionnement supérieur à 5 heures », et sa probabilité est $p = \mathbb{P}(X > 5)$. Cette expérience est répétée $n = 8$ fois de manière indépendante.

   La variable Y est le nombre de succès, donc Y suit une loi binomiale de paramètres $p = \mathbb{P}(X > 5) \simeq 0{,}513$ et $n = 8$.

   (b) On veut $\mathbb{P}(Y = 3) = 0{,}207$ (calculatrice).

   (c) On veut $E(Y) = n \times p = 8 \times 0{,}513 \simeq 4$ (arrondi à l'entier le plus proche).