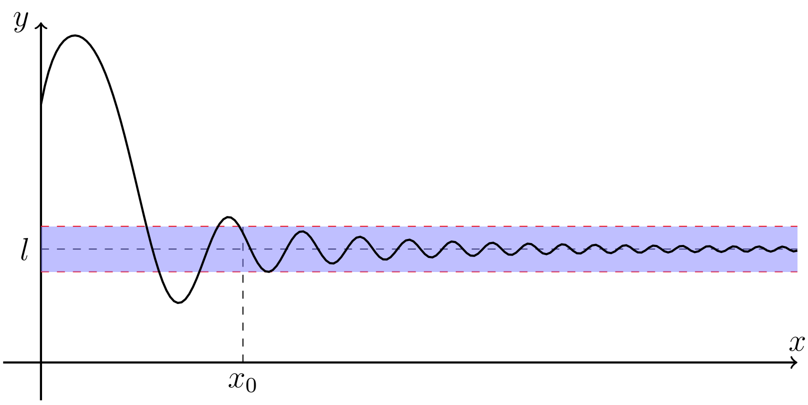
Chapitre :
Modèles continus

I. Limites d'une fonction

1. Limite à l'infini

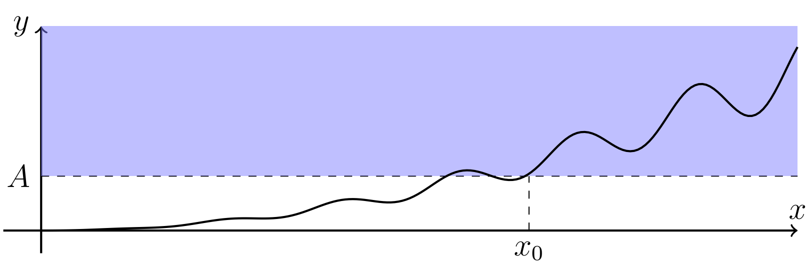
Soit f une fonction, soit l un réel.

Définition On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, quelque soit l'intervalle ouvert I contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \in I$.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, et on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.



Définition Quand une fonction admet une limite finie l en $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que la courbe de représentative f admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = l$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Définition On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ si quel que soit le réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $f(x) > A$ (resp. pour tout $x < x_0$, $f(x) < A$).
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).



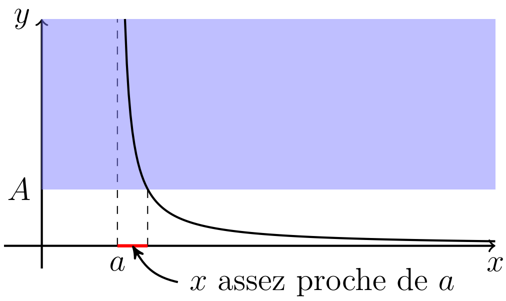
On peut donner des définitions similaires pour les limites lorsque x tend vers $-\infty$.

⚠ Les méthodes vues pour déterminer les limites avec les suites restent valable avec les fonctions.

2. Limite infinie en un réel a

Soit a un réel.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; a+r]$ ou $[a-r; a[$, où r est un réel positif.
(remarquer que f n'est *a priori* pas définie en a)

Définition On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si pour tout réel A, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



On peut donner une définition similaire pour une limite égale à $-\infty$.
Dans certains cas, on différencie avec une limite à gauche et une limite à droite (voir plus bas).

Définition Dans le cas où une fonction admet une limite infinie en un réel a, on dit que la courbe représentative de f admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$ (que la courbe ne touche jamais mais dont elle s'approche).

3. Limites de référence

- En $-\infty$:
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- En $+\infty$:
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- En 0 :
  - $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, aussi notée $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
  - $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, aussi notée $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Pour les opérations, voir le tableau donné pour les suites.
Les théorèmes de comparaison vus pour les suites sont également valables pour les fonctions.

► **Exercices :** Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique

► **Exercices :** Limites et asymptotes – calculs

► **Exercices :** Limites par comparaison

► **Exercices :** Limites avec formes indéterminées

II. Équations différentielles ; primitives

Définition Une équation différentielle du premier ordre est une équation liant une **fonction inconnue** y, dérivable sur un intervalle I, et sa dérivée y'.

⚠ Une solution d'une équation différentielle est donc une fonction.
Nous n'en étudierons ici que deux particulières.

1. Équation $y' = f$ et primitives

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque Si F est une primitive de f, alors f est la dérivée de F.
En quelque sorte, chercher une primitive, c'est faire l'opération inverse de la dérivée.

Propriété Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
Il existe même une infinité de primitives.

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Soit G une primitive de f sur I.
Alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.
Autrement dit, si on connaît une primitive de f, on connaît toutes les autres ; on dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Déterminer une primitive peut être compliqué (voire impossible).
Cependant pour certains cas on peut disposer de formules.
Consulter la fiche sur les primitives pour des formules.
Il est conseillé de recopier ce tableau pour l'apprendre.
⚠ Il n'existe pas de formule de primitives pour des expressions comme uv ou $\dfrac{u}{v}$.
On ne connaît de primitives pour des produits ou des quotients que dans des cas particuliers.

▶ **Exercices :** Primitives

▶ **Exercices :** Primitive et fonction – variation et signe

2. Équation $y' = ay + b$

Commençons par la résolution de cette équation lorsque $b = 0$.

Propriété Soit a un nombre réel fixé. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$, où k est une constante réelle.

Remarque Chaque valeur de k donne une fonction qui est solution de l'équation différentielle.
Il y a donc une infinité de solutions à cette équation différentielle.

Toute solution de l'équation plus générale $y' = ay + b$ est la somme d'une solution de l'équation $y' = ay$ et d'une constante qui est solution particulière de l'équation $y' = ay + b$.
Plus précisément :

Propriété Soit a et b deux nombres réels fixés avec $a \neq 0$.
- L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution particulière constante $x \mapsto \alpha$, où α est un nombre réel.
  En fait, $\alpha = \dfrac{-b}{a}$
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} + \alpha$, où k est une constante réelle.

Exemple Soit l'équation différentielle $3y' + 2y + 5 = 0$
Cette équation équivaut à $y' = \dfrac{-2}{3}y - \dfrac{5}{3}$.
- On cherche déjà la solution particulière constante.
  Soit $u(x) = \alpha$ cette solution particulière.
  Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \dfrac{-2}{3}u(x) - \dfrac{5}{3}$.
  Mais $u(x) = \alpha$ constante, donc $u'(x) = 0$.
  Il vient alors que $0 = \dfrac{-2}{3}\alpha - \dfrac{5}{3}$.
  Ainsi, $\alpha = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{-2}{3}} = -\dfrac{5}{2}$.
- Par suite, toute solution f de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-2}{3}y - \dfrac{5}{3}$
  a pour expression $f(x) = k\,\mathrm{e}^{\frac{-2}{3}x} - \dfrac{5}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Si on fixe la valeur d'une image pour une valeur de x donnée, alors cela fixe la valeur de k.

Exemple Pour la même équation différentielle que précédemment, cherchons la fonction f telle que $f(3) = \dfrac{1}{2}$.
Alors $k\,\mathrm{e}^{-2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$, ainsi on trouve $k = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{-2}} = 3\,\mathrm{e}^{2}$.
Ainsi, $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{\frac{-2}{3}x+2} - \dfrac{5}{2}$.

► **Exercices :** Équations différentielles $y' = ay'$

► **Exercices :** Équations différentielles $y' = ay + b$