Chapitre :
Fonction logarithme

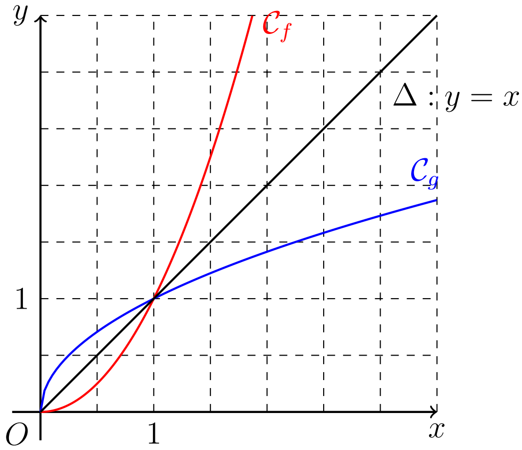
⊛ **Activité :** Fonctions réciproques

⊛ **Activité :** Des produits à l'aide de sommes

I. Réciproque de l'exponentielle

Propriété **(et définition de fonction réciproque)** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f est continue et strictement monotone sur I. On note $J = f(I)$, c'est à dire que J est l'image de I, autrement dit l'ensemble des $f(x)$ avec $x \in I$. J est alors un intervalle, et pour tout $a \in J$, il existe un unique réel b tel que $f(b) = a$.
On peut alors définir la fonction g sur J qui, à tout réel a de J associe le réel b, c'est à dire telle que $g(a) = b$.
On dit que g est la fonction réciproque de f.
On a alors la propriété suivante : Quels que soit $a \in J$ et $b \in I$, $a = f(b) \Leftrightarrow b = g(a)$.

Graphiquement, Les courbes représentatives de f et g sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.
Un exemple simple de cela est la fonction carré, $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0; +\infty[$, et sa réciproque, la fonction racine carrée, $g : x \mapsto \sqrt{x}$:

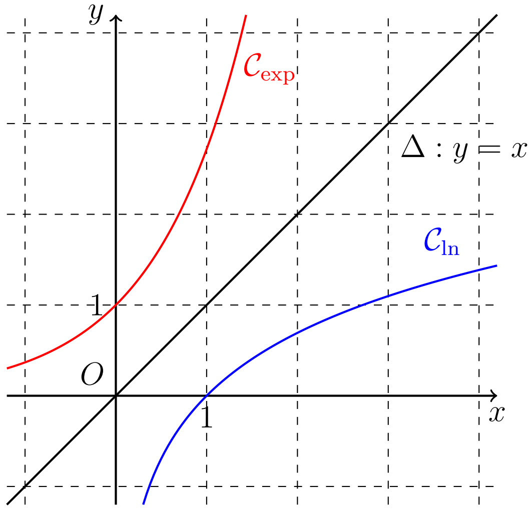


Définition La fonction exponentielle exp est définie sur $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ et $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$. Elle est continue et strictement croissante. Elle admet donc une fonction réciproque d'après la propriété précédente. On appelle cette fonction réciproque la fonction **logarithme népérien**.
On note cette fonction ln.
On a alors la propriété suivante :
Quel que soit $a > 0$ et $b \in R$, $a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow \ln(a) = b$.

Quelques valeurs à connaître : $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
On note parfois abusivement $\ln x$ (sans parenthèse) au lieu de $\ln(x)$.

⚠ Ne pas confondre $\ln x + 1$ et $\ln(x+1)$. La première expression est en fait $\ln(x) + 1$.

Bien sûr, les courbes représentatives de ln et exp sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$:



Propriétés

- La fonction logarithme (népérien) est continue sur $]0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- Quel que soit $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
- Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

▶ **Exercices :** Limites

On peut alors résoudre quelques (in)équations supplémentaires :

Exemple

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 3 = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3 \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \ln x - 8 < 0 &\Leftrightarrow \ln x < 8 \\ &\Leftrightarrow x < \mathrm{e}^8 \end{aligned}$$

▶ **Exercices :** Équations de base

▶ **Exercices :** Inéquations de base

II. Propriétés de la fonction logarithme

Propriété La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse.

Autrement dit, la fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration :
Si on admet que la fonction ln est dérivable, on utilise la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\ln x}$ définie sur $]0;+\infty[$.
Elle est de la forme e^{u} avec $u(x)=\ln(x)$. Sa dérivée est donc $u'\,\mathrm{e}^{u}$, dont l'expression est $\ln'(x)\,\mathrm{e}^{\ln x}$.
Or $\mathrm{e}^{\ln x}=x$, donc la dérivée de la fonction est $x \mapsto 1$ et : $\ln'(x)\times x=1$.
Comme $x\neq 0$, on a bien $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Corollaire La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus :
- $0<x<1 \Leftrightarrow \ln(x)<0$;
- $x>1 \Leftrightarrow \ln(x)>0$;
- Soit a et b strictement positifs. Alors : $a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$, mais aussi : $a>b \Leftrightarrow \ln(a)>\ln(b)$
- La fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$ (sa dérivée seconde est négative).

Propriété Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.
Alors la fonction $x\mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et a pour dérivée

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On en déduit que $\ln u$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$.

▶ **Exercices :** Dérivation

▶ **Exercices :** Primitives

▶ **Exercices :** Étude de fonction

▶ **Exercices :** Modélisation (approfondissement facultatif)

III. Relation fonctionnelle

Théorème Pour tous a et b réels strictement positifs,

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

Cette égalité est appelée **relation fonctionnelle** du logarithme.
On dit que le logarithme transforme le produit en somme.
(Rappel : l'exponentielle transforme la somme en produit)

Démonstration : Équivalences en passant par l'exponentielle.

Propriété Pour tout $b>0$,

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$$

Démonstration : Similaire à la précédente.
Les deux précédentes propriétés permettent d'établir les résultats suivants :

Corollaire
- Soit a et b strictements positifs. Alors :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

- Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :
$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$
le nombre n peut également être un entier relatif pour la dernière égalité.
- Pour tout $a > 0$,
$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

La démonstration de la dernière fait l'objet en particulier d'un exercice.
Ces relations permettent bien entendu de réécrire des expressions utilisant le logarithme.

▶ **Exercices :** Relation fonctionnelle

▶ **Exercices :** Équations avec relation fonctionnelle

Avec cette propriété, on peut résoudre des (in)équations dont l'inconnue est en exposant :

Exemple

$$\begin{aligned}
0{,}7^n < 10^{-2} &\Leftrightarrow \ln\left(0{,}7^n\right) < \ln\left(10^{-2}\right) && (\ln \text{ est croissante})\\
&\Leftrightarrow n\ln(0{,}7) < \ln\left(10^{-2}\right) &&\\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(10^{-2}\right)}{\ln(0{,}7)} && (\ln(0{,}7) < 0 \text{ car } 0{,}7 < 1)\\
&\Leftrightarrow n > 12{,}9 &&
\end{aligned}$$

Autrement dit, dès que $n \geqslant 13$, on a $0{,}7^n < 10^{-2}$.

▶ **Exercices :** Rangs de suites