

# Chapitre :

## Calculs d'aires



⊗ **Activité** : Calculer l'aire d'un disque

## I. Intégrale de fonction continue positive

---

Dans cette partie, toutes les fonctions sont supposées continues et positives.

On se place dans un repère orthogonal  $(0; I; J)$ .

On appelle unité d'aire (u.a.) l'aire du rectangle dont trois des sommets sont  $O, I$  et  $J$ .

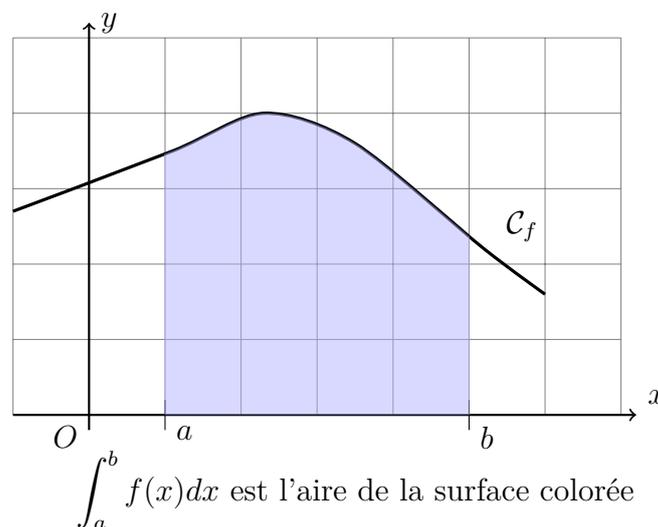
**Définition** Soit  $a$  et  $b$  deux réels,  $f$  une fonction (continue et positive) sur l'intervalle  $[a; b]$ , et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

L'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est l'aire (mesurée en unités d'aires) de la surface délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(t)dt$$

On dit que  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'intégrale.



**Remarque** Dans le cas particulier où  $a = b$ , on a  $\int_a^a f(t)dt = 0$ .

En effet, l'aire en question est celle d'un segment, donc elle vaut 0.

**Remarque** Le nom de la variable dans l'intégrale n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Le symbole de l'intégrale fait penser à un 'S' ; on peut voir cela comme la somme d'aires de rectangles de hauteur  $f(t)$  et de largeur presque nulle ( $dt$ ) qui approximent l'aire sous la courbe.

Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction quelconque peut s'avérer très complexe sans propriété supplémentaire.

Quand les surfaces se découpent en demi-cercles, triangles, trapèzes, on peut s'en sortir sans trop de problème.

► **Exercice** : Aires par lecture graphique

► **Exercice** : Calcul simple par graphique

## II. Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

---

**Définition** Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ .  
On considère la fonction  $F$  définie sur  $[a; b]$  par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

**Propriété** La fonction  $F$  est dérivable sur  $[a; b]$  et a pour dérivée  $f : F' = f$ .  
Autrement dit,  $F$  est une primitive de  $f$ .

D'autre part,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

En fait, plus généralement :

**Propriété** Soit  $F$  une primitive de  $f$ , donc telle que  $F' = f$ . Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Il suffit donc de trouver une fonction  $F$ , primitive de  $f$ , pour calculer l'intégrale.

Plus généralement encore, on définit l'intégrale d'une fonction non nécessairement positive sur un intervalle  $[a; b]$  par le biais d'une primitive et de la formule obtenue précédemment :

**Définition** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et soit  $F$  une primitive de  $f$ .  
On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$  le nombre défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

► **Exercices** : Calculs d'intégrales

La propriété suivante permet de décomposer le calcul d'intégrales :

**Propriété** (Linéarité)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a; b]$  et soit  $\alpha$  un réel. Alors :

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$  ;
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

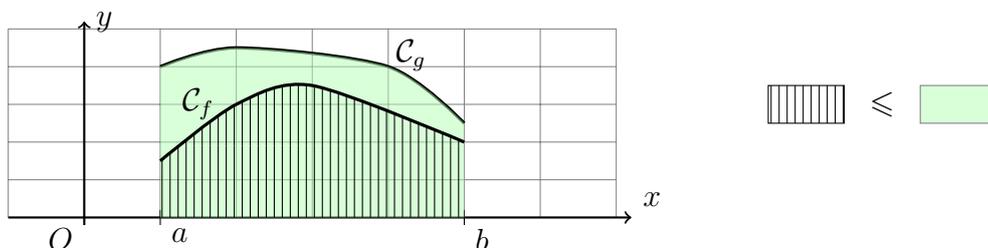
Ces deux propriétés font que l'on dit que l'intégrale est linéaire (comme les fonctions du même nom).

► **Exercices** : Linéarité

# III. Autres propriétés de l'intégrale

**Propriété (Comparaison)** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a; b]$ .  
Si, pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ .

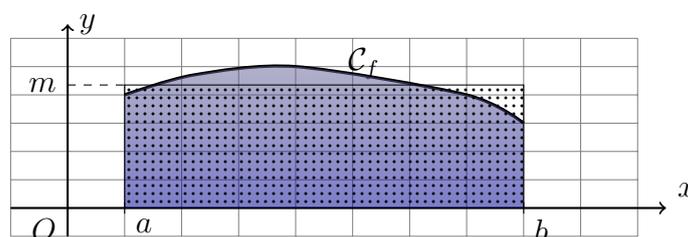
Illustration :



**Définition (Valeur moyenne)** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .  
La valeur moyenne d'une fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $[a; b]$  est :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

On explique cette définition par l'interprétation graphique suivante :  
 $m$  est la hauteur d'un rectangle de largeur  $b - a$  qui a la même aire que celle sous la courbe de  $f$ .



La zone bleue et le rectangle rempli de points ont la même aire. Autrement dit,  $m \times (b-a) = \int_a^b f(t)dt$ .  
On a donc bien  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ .

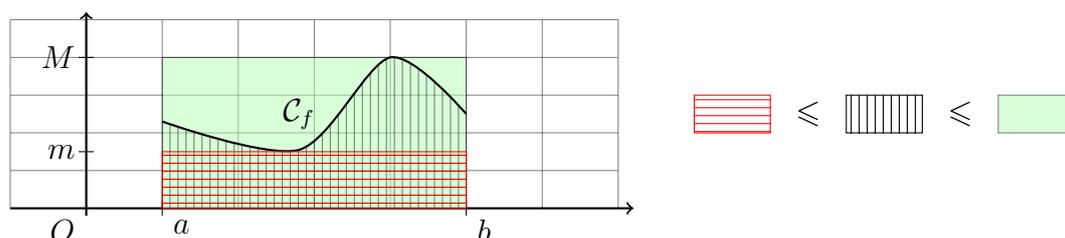
► Exercices : Valeur moyenne

**Propriété (encadrement d'une intégrale)**

Si il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ , alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Illustration :



► Exercice : Encadrement

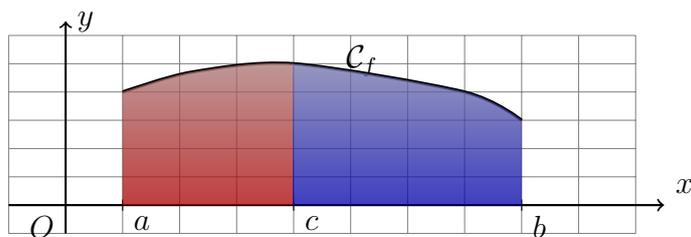
**Propriété** (Relation de Chasles) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et soit  $c \in [a; b]$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

On appelle cette relation la relation de Chasles (elle fait penser à la relation de Chasles vue en seconde pour les vecteurs).

Cette propriété est utile dans le cas où l'on souhaite calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux.

Illustration graphique :



► **Exercice** : Relation de Chasles