Chapitre :
Temps d'attente
Lois continues

Ce chapitre introduit la notion de loi de probabilité continue, avec comme applications des temps d'attentes et autres durées de vie.

I. Loi géométrique

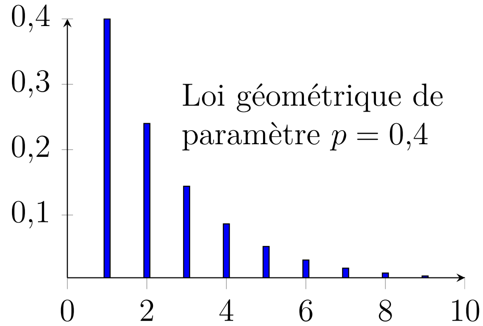
Définition On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On répète cette épreuve de façon identique et indépendante **jusqu'à l'obtention du premier succès**. Contrairement à la loi binomiale, il n'y a donc pas un nombre fixé à l'avance de répétition de l'expérience, et celui-ci varie à chaque réalisation de l'expérience.
On note X la variable qui, à cette répétition d'épreuves, associe le rang du premier succès. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p. La variable X peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{N}^\star$ (tous les entiers naturels non nuls).

La valeur de X n'est donc pas un nombre de succès (celui-ci est toujours égal à 1), mais le nombre de répétitions jusqu'à obtenir le succès.

Propriété Si une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p \times (1-p)^{k-1}$$

Démonstration : En effet, il y a exactement un succès, de probabilité p, et $(k-1)$ échecs, de probabilité $(1-p)$, et les épreuves sont indépendantes. Donc la probabilité est le produit de ces nombres.



Propriété Si une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

Propriété **(Loi de la probabilité sans mémoire)**
La loi géométrique est une loi de probabilité sans mémoire, c'est à dire que :

$$\mathbb{P}_{X>m}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > n)$$

Autrement dit, la probabilité conditionnelle que le nombre de succès dépasse $m+n$ (n de plus que m) sachant que le nombre de succès dépasse m est égale à la probabilité que le nombre de sucès dépasse n.
Une autre manière de le voir est que s'il y a déjà eu m échecs, la probabilité qu'il faille encore n répétitions pour avoir un succès est la même que la probabilité d'avoir n répétitions en commençant de zéro.

▶ **Exercices :** Loi géométrique

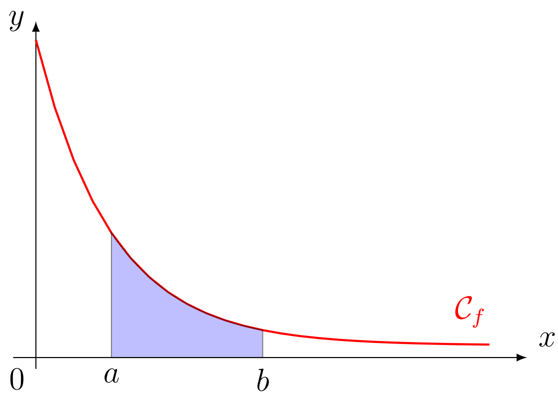
II. Variables continues

Définition Soit X une variable aléatoire. Si X prend comme valeurs tous les nombres d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que X est **continue**.

Définition Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction **densité** si :
- f est positive sur $\mathbb{R}$: quelque soit x réel, $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs (il peut y avoir un nombre fini de sauts) ;
- L'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f dans un repère orthogonal est égale à 1 u.a. (la somme totale des probabilités vaut 1).

Définition Soit f une fonction de densité. On dit qu'une variable aléatoire X a pour densité la fonction f si, quelque soit a et b deux réels ($a < b$),

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$$



Remarque Soit k un réel quelconque et X une variable aléatoire continue. Alors $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$. Autrement dit, on ne change pas la probabilité en ajoutant les bornes de l'intervalle $[a; b]$ ou non.

► **Exercices :**

Rappel (Espérance d'une variable aléatoire discrète) L'espérance d'une variable aléatoire X prenant un nombre fini de valeurs (donc discrète) est donnée par la somme des produits des valeurs x_i par leur probabilité d'être obtenues $\mathbb{P}(X = x_i)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathbb{P}(X = x_i)$$

De manière similaire, on définit alors :

Définition (Espérance d'une variable aléatoire continue) Pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un intervalle $[a; b]$, et de densité f, son espérance est définie par :

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t)dt$$

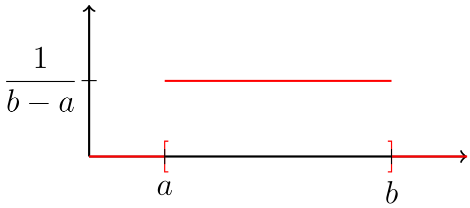
► **Exercices :** Lois continues

III. Loi uniforme

Définition Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si elle a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La variable X prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[a; b]$, et ce de manière uniforme.



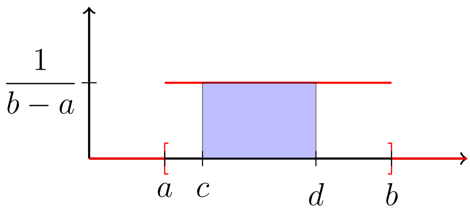
Propriété Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$. Alors la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 1 \text{ si} x > b \end{cases}$$

Conséquence : Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ et si c et d sont deux nombres de $[a; b]$ tels que $c < d$, alors

$$\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

soit le rapport entre l'amplitude de $[c; d]$ et celle de $[a; b]$.



Propriété Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Autrement dit, si l'on choisit un grand nombre de valeurs données aléatoirement et uniformément dans un intervalle $[a; b]$, alors la moyenne de ces valeurs sera proche de la valeur centrale de l'intervalle $[a; b]$.

▶ **Exercices :** Loi uniforme

IV. Loi exponentielle

La loi exponentielle est la version continue de la loi discrète géométrique vue en début de chapitre.

Définition Soit λ un réel **strictement positif**.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, $\mathbb{P}(a \leqslant T \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Par suite,

$$\mathbb{P}(T \leqslant b) = 1 - e^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T > a) = e^{-\lambda a}$$

Démonstration :
La fonction $F : x \mapsto -e^{-\lambda x}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
Donc $\mathbb{P}(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = -e^{-\lambda b} - \left(-e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
Par suite,

$$\mathbb{P}(T \leqslant b) = \mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant b) = e^{-\lambda 0} - e^{-\lambda b} = 1 - e^{-\lambda b}$$

puis

$$\mathbb{P}(T > a) = 1 - \mathbb{P}(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}$$

Propriété Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors son espérance est : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Propriété **(Durée de vie sans vieillissement)** Si T est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h,

$$\mathbb{P}_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) = \mathbb{P}(T \geqslant h)$$

Démonstration : On exprime :

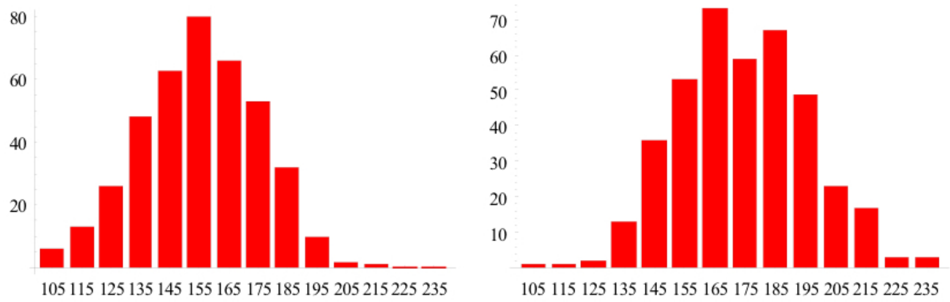
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) &= \frac{\mathbb{P}(T \geqslant t \text{ et } T \geqslant t + h)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T \geqslant t + h)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda h} \\
&= \mathbb{P}(T \geqslant h)
\end{aligned}$$

▶ **Exercices :** Loi exponentielle

V. Loi normale (hors programme)

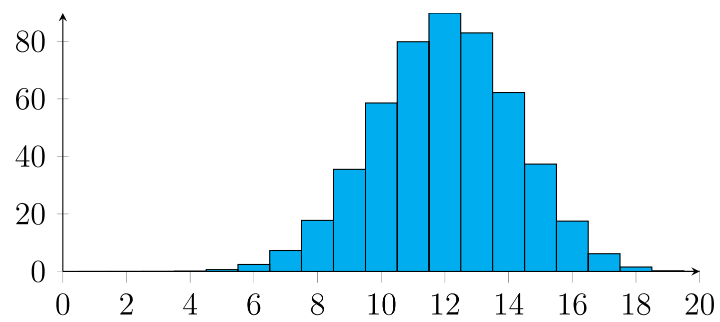
1. Introduction

Le mot « aléatoire » ne signifie pas toujours « uniformément réparti » (en fait c'est plutôt « au hasard » qui généralement a ce sens). Par exemple, la taille des être humains n'est pas répartie de manière uniforme (autrement dit comme la loi uniforme). On peut observer plutôt quelque chose comme représentation en « cloche » (lorsque l'on sépare la population en hommes et femmes) :



Deux distributions pour la taille de femmes (à gauche) et d'hommes (à droite)

On observe pour cela une ressemblance avec la représentation de la loi binomiale (discrète) :



Mais les valeurs comme la taille sont des variables continues, on souhaite donc avoir une loi continue qui permette de les modéliser.
Il se trouve qu'il existe effectivement une courbe de fonction qui « colle » à la loi binomiale. C'est celle de la densité de la loi dite **normale**.
On peut observer cela dans le fichier Geogebra donné avec ce cours. Pour le comprendre, il faut savoir que :

- **centrer** signifie soustraire l'espérance, ce qui fait que l'espérance devient nulle.
- **réduire** signifie diviser par l'écart-type, ce qui fait que l'écart-type devient égal à 1.

Il est possible d'ouvrir le fichier sur Internet, à partir du site à l'adresse suivante :
https://www.geogebra.org/classic.
Pour ouvrir un fichier, on va dans le menu ≡ > Fichier > Ouvrir.
Là on clique sur l'icône de dossier à droite.
Sur ce fichier, on observe que la loi binomiale, une fois centrée et réduite, colle parfaitement à la loi normale centrée réduite, cela d'autant plus que la valeur de n augmente.
Par contre, il est à remarquer que la loi normale est définie sur $\mathbb{R}$, quand la loi binomiale centrée réduite prend ses valeurs dans $\left[-\frac{n}{2};\frac{n}{2}\right]$. Il faut voir la loi normale comme ce que l'on obtient avec une loi binomiale en faisant tendre n vers l'infini.
La « cloche » de la courbe de la loi normale est appelée courbe de Gauss.

2. Loi normale centrée réduite

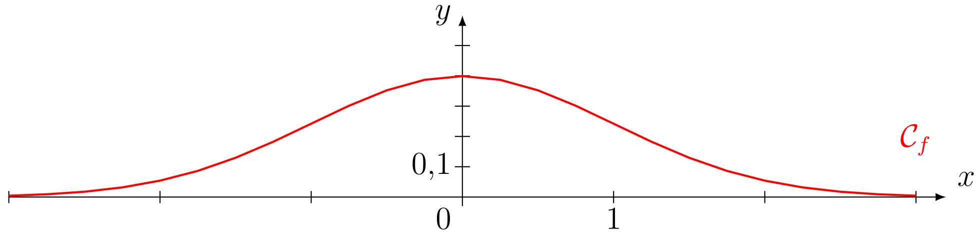
Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note $\mathcal{N}(0;1)$ la loi normale centrée réduite.

Remarque Il n'y a pas d'expression de la primitive de f à l'aide de fonctions usuelles.
Par conséquent, aucune expression de la fonction de répartition ne peut être donnée.

La connaissance de l'expression de cette fonction f n'est a priori pas requise, mais la connaissance de la forme de sa courbe est à connaître :



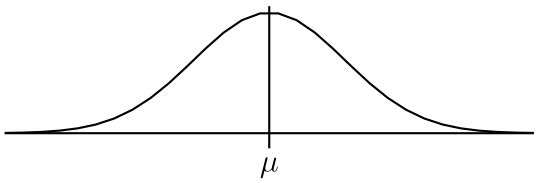
Représentation de la fonction f

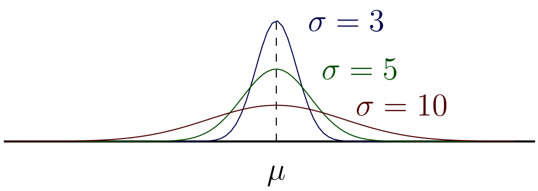
Remarque La fonction f est paire, c'est à dire que la courbe admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie. Cette symétrie est très importante et peut servir à résoudre certains problèmes.

3. Loi normale (quelconque)

Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite de moyenne μ et d'écart-type σ si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
On note $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

La courbe de la fonction de densité pour une telle variable est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.





l'écart-type σ donne une indication des écarts des valeurs prises à la moyenne. Plus σ est grande, plus les écarts peuvent être importants. Ainsi, la courbe de f « s'élargit », tout en s'écrasant vers l'axe des abscisses (l'aire sous la courbe vaut toujours 1 !).

La notation pour la loi est $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, autrement dit le deuxième paramètre n'est pas l'écart-type σ mais bien son carré.
Par exemple, si $X \sim \mathcal{N}(120;100)$ (cela se lit « X suit la loi normale de paramètres 120 et 100), alors $\mu = 120$ et $\sigma^2 = 100$, donc $\sigma = 10$. Donc X suit la loi normale d'espérance 120 et d'écart-type 10.
Il est conseillé de lire la fiche méthode pour voir comment peut (et doit !) être utilisée la représentation de la cloche pour déterminer des probabilités. La symétrie de la courbe, comme déjà dit, est importante. En particulier, on a : $\mathbb{P}(X \leqslant \mu) = \dfrac{1}{2}$.

<u>Méthode</u> (Calculer une probabilité avec la calculatrice)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(120;10^2)$.
On veut par exemple déterminer la probabilité que $X > 150$.
Il faut se ramener au calcul d'une probabilité de la forme $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$.
Ici, on a : $\mathbb{P}(X > 150) = \dfrac{1}{2} - \mathbb{P}(120 \leqslant X \leqslant 150)$ (faire une figure !)
On utilise la calculatrice pour calculer $\mathbb{P}(120 \leqslant X \leqslant 150)$ (voir page 225).
On obtient : $\mathbb{P}(X > 150) \simeq 0{,}5 - 0{,}49865 \simeq 0{,}00135$.

4. Propriétés

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Alors :

$$\mathbb{P}(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \simeq 0{,}95$$

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \simeq 0{,}68$$

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}95$$

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \simeq 0{,}99$$