

Soit à résoudre le problème suivant (trouvé sur le site Internet bibmath.net) :

On considère un carré de côté 7 cm. À l'intérieur de ce carré sont placés de manière aléatoire 51 points. Démontrer qu'il existe un disque de rayon 1 cm qui contient au moins trois de ces points.

Ma solution :

On suppose que quelque soit la position des 51 points dans le carré un tel disque n'existe pas.

On considère pour chacun des 51 points le cercle de rayon 1 cm et de centre le point.

On souhaite déterminer l'aire minimale que doit remplir l'ensemble de ces disques sur le plan, en trouvant des contraintes que les points doivent satisfaire pour obtenir cette aire minimale.

L'aire est maximale si les disques n'ont pas d'intersections communes, elle se réduit si des disques s'intersectent.

L'aire formée par deux disques qui s'intersectent est minimale si les cercles sont confondus, autrement dit si ils ont le même centre.

On considère alors autant que possible les points confondus deux à deux, ce qui fait 25 couples de points confondus et un point isolé.

L'aire minimale recherchée est donc au moins égale à l'aire de 25 + 1 disques : 25 disques ayant pour centre un point « double » et le disque de centre le point isolé.

Elle ne peut pas être inférieure dans une telle configuration car si deux disques non confondus s'intersectent, alors la distance entre deux centres serait strictement inférieure à 2, et le cercle de centre le milieu des deux centres et de rayon 1 contiendrait les 2 centres, autrement dit au moins 3 des points (au moins un des deux cercles aurait pour centre un point double). Cela contredit l'hypothèse de départ du raisonnement.

Par conséquent l'aire minimale recherchée est bien l'aire de 26 disques, donc $26\pi \text{ cm}^2$.

Or, étant donné que les centres de ces cercles sont situés dans le carré de 7 cm de côté et que les cercles sont de rayon 1 cm, ces disques doivent tous se situer dans un carré de 9 cm de côté, autrement dit un carré d'aire $9 \times 9 = 81 \text{ cm}^2$.

Il se trouve que $26\pi > 81$, l'aire minimale formée par l'ensemble des cercles est donc supérieure à l'aire du carré qui les contient tous : c'est impossible.

Pour information voici la solution donnée sur le site bibmath.net par Totomm :

On va d'abord recouvrir le carré par 25 cercles de rayon 1cm. Pour cela, on peut commencer par remarquer que $5 \times \sqrt{2} > 7$. Ainsi, on peut recouvrir le carré de côté 7 cm par $5 \times 5 = 25$ carrés de côté $\sqrt{2}$ cm. Les cercles circonscrits à ces carrés recouvrent le grand carré, et sont de rayon exactement égal à 1 cm.

Maintenant, si aucun de ces cercles ne contient 3 points, alors ils en contiennent tous au plus 2, et il y aurait au plus $2 \times 25 = 50$ points, ce qui n'est pas le cas !

Remarque :

Ma solution semble moins bonne que celle de Totomm sans même considérer sa longueur :

Si le carré n'est plus de 7 mais $5\sqrt{2}$ cm de côté, le raisonnement de Totomm tient toujours, mais pas le mien car alors le grand carré aurait pour aire $(5\sqrt{2} + 2)^2$ qui n'est plus inférieure à 26π .

Cependant si l'on tient en compte que les disques apparents sont tous disjoints entre eux, ils laissent nécessairement des espaces vides à l'intérieur du grand carré. On peut alors ajouter ces espaces vides à l'aire des cercles pour savoir quelle est l'aire minimale requise.

Déjà, les quatre « coins » du grand carré ne peuvent pas être occupés par les disques. Ces quatre coins ont pour aire totale l'aire d'un carré de côté 2 cm moins celle d'un disque de rayon 1 cm, autrement dit $4 - \pi$.

L'aire totale nécessaire (ensemble des disques plus quatre coins) est alors $26\pi + (4 - \pi) = 25\pi + 4$, et elle est bien supérieure à $(5\sqrt{2} + 2)^2$.

Alors, « seulement » avec ces quatre coins, on peut même agrandir le carré de départ. Par exemple un carré de côté 7,08 cm.

Là ma nouvelle méthode fonctionne encore , alors que celle de Totomm ne fonctionne plus.