

Fonction exponentielle



1. Définitions et propriétés immédiates

Définition L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On peut la noter $\exp$. On a donc $\exp(0) = 1$.

Ainsi :

Propriété La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Propriété (**Relation fonctionnelle**) Pour tous nombres réels x et y ,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Remarque On dit parfois que la fonction $\exp$ transforme les sommes en produit.

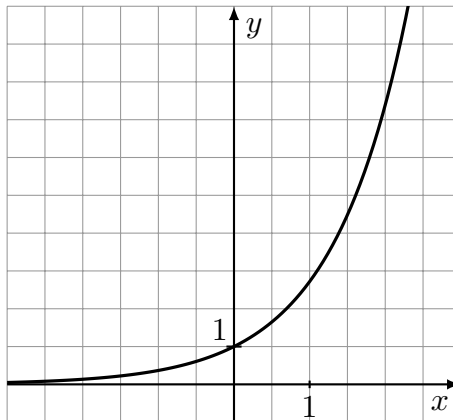
Propriété La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$:

$$\text{quel que soit } x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$$

Propriété La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\text{Quels que soient } a \text{ et } b \text{ réels, si } a < b \text{ alors } \exp(a) < \exp(b)$$

La courbe de la fonction exponentielle est la suivante :



Propriété Soit a et b des nombres réels, et soit $n \in \mathbb{N}$.

Les égalités suivantes sont conséquence de la relation fonctionnelle :

$$\exp(2a) = (\exp(a))^2 \quad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \quad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad \exp(na) = (\exp(a))^n$$

2. Notation avec le nombre e

Définition (Nombre e) On note e le nombre $\exp(1)$. Ainsi, $\exp(1) = e$.
D'après la propriété précédente, quelque soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$$

On généralise cette égalité, et on note, pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$.

Avec cette notation, on peut redonner les propriétés données plus haut :

Propriété Pour tous réels x et y et pour tout entier n :

$$\begin{aligned} &\text{si } f(x) = e^x \text{ alors } f'(x) = e^x \\ e^0 &= 1 & e^x > 0 & e^{x+y} = e^x e^y & e^{nx} = (e^x)^n \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} & e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \end{aligned}$$

Propriété (Équations et inéquations) Soit a et b deux nombres réels. Alors :

$$\begin{aligned} e^a &= e^b \Leftrightarrow a = b \\ e^a &< e^b \Leftrightarrow a < b \end{aligned}$$

Cette propriété permet de résoudre certaines équations :

Exemple Soit à résoudre l'équation $e^{2x+5} = e^9$.

D'après la propriété, cette équation équivaut à $2x + 5 = 9$, soit à $x = 2$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{2\}$.

3. Fonction e^u

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction e^u est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $u' e^u$. Autrement dit :

$$(e^u)' = u' e^u$$

De plus, e^u a le même sens de variations que u .

4. Limites

Propriété On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Propriété (Hors programme) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.