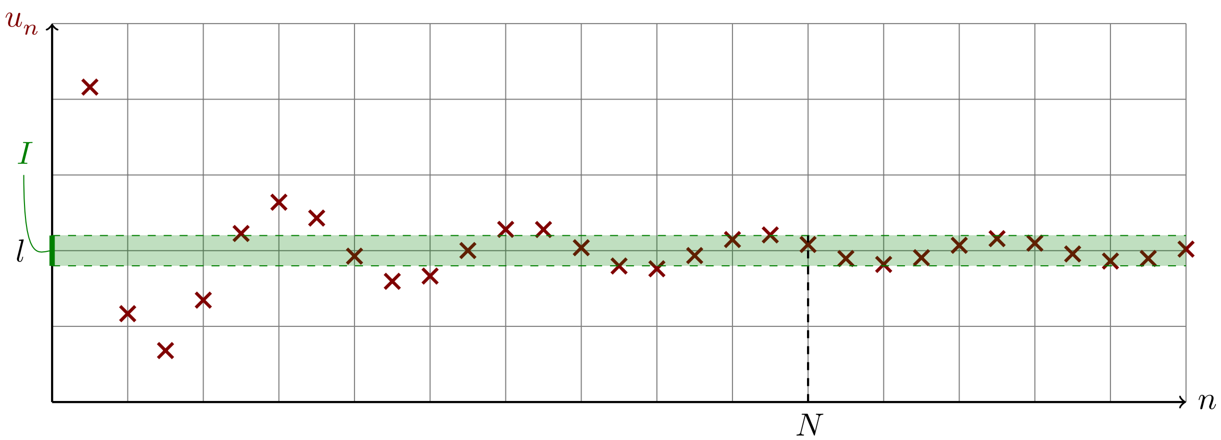
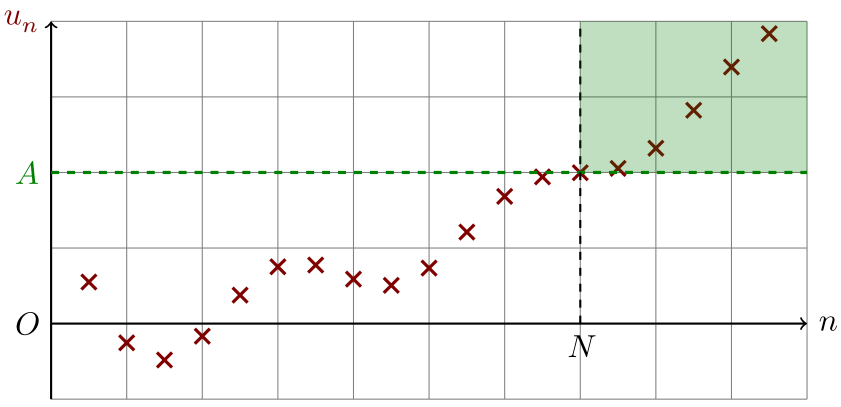
Limites de suites

Définition (Limite finie) Une suite u a pour limite (finie) l ($l \in \mathbb{R}$) si tout intervalle ouvert I contenant l (cet intervalle étant aussi petit que l'on souhaite) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N.
Mathématiquement : quel que soit l'intervalle ouvert I tel que $l \in I$, il existe un entier N tel que quel que soit $n \geqslant N$, $u_n \in I$.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.



Définition On dit qu'une suite **converge** si elle a une **limite finie**.

Définition (Limite infinie) Une suite u a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si quel que soit le réel A, il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs (resp. inférieurs) à A.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).



Définition On dit qu'une suite **diverge** si elle **ne converge pas**.
Une suite qui a une limite infinie est donc une suite qui diverge.
Une autre manière de diverger pour une suite est de ne pas avoir de limite, comme $(-1)^n$ et $\sin(n)$.

Limites de base à connaître
k est un entier non nul.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

Opérations sur les limites

Pour les « ∞ » (dont le signe n'est pas précisé), la règle des signes s'applique.

Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminé

Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l' \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	∞	∞	indéterminé

Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l' \neq 0$	l	∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	0	∞	l	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	0	∞	indéterminé	indéterminé

Résumé des quatre **formes indéterminées** indiquées dans les tableaux :

$$(+\infty)+(-\infty) \qquad 0\times\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Quand une expression est de forme indéterminée, il faut la réécrire sous une autre forme qui ne soit plus indéterminée afin d'obtenir la limite.

Théorème **(des gendarmes)**

Soit u, v et w trois suites et N un entier naturel.

On suppose que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

On suppose qu'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.