Définition On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une S appelée **succès** et l'autre $\overline{S}$ appelée échec. On note p la probabilité du succès. La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli. La loi de probabilité, appelée **loi de Bernoulli de paramètre p**, est donnée par :

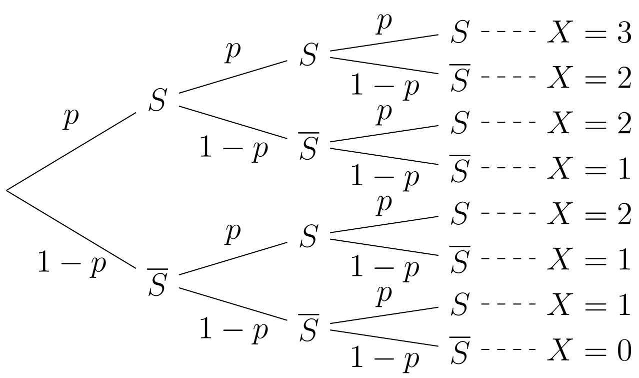
x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors :

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Définition L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^{\star}$) de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p**. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves. On appelle alors **loi binomiale de paramètres n et p** la loi de probabilité de X. On la note $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple Voici une représentation avec un arbre pondéré pour $n = 3$:



Il y a une rédaction à connaître pour justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale.

Exemple Un QCM comporte cinq questions et, pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un élève répond au hasard à ce QCM, ses réponses étant alors indépendantes. En particulier, pour chaque question, la probabilité que la réponse de l'élève soit exacte est $\frac{1}{4}$. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de réponses exactes obtenues par cet élève. Quelle est la loi suivie par X ?
On considère l'**épreuve de Bernoulli** qui consiste pour l'élève à répondre à une question du QCM. L'**événement succès** est le fait que la réponse soit exacte. La **probabilité de succès** est alors $p = \frac{1}{4}$. **L'expérience est répétée** $n = 5$ fois **de manière indépendante** et on s'intéresse au **nombre X de succès**. On obtient donc un shéma de Bernoulli et X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$: On le note $X \sim \mathscr{B}(5; 0{,}25)$ (le symbole $\sim$ se lit « suit la loi »).

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Alors :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Les calculs de probabilités associés à la loi binomiale peuvent se faire avec la calculatrice. Il y a deux types de probabilités qui peuvent être obtenus :

- $\mathbb{P}(X = k)$:
  en Casio : BinominalPD(k,n,p)
  en TI : binomFdp(n,p,k)
- $\mathbb{P}(X \leqslant k)$:
  en Casio : BinominalCD(k,n,p)
  en TI : binomFRép(n,p,k)