Méthodes utiles en TES

La première des méthodes est de connaître le cours et les formules !

Table des matières

I. Intervalles de fluctuation & confiance

1. Fluctuation

Il y a trois paramètres à bien identifier : p, n et f.

- p est la proportion dans la population totale ;
- f est la fréquence observée dans un échantillon (de taille n).

Pour l'intervalle de fluctuation, p est **connue**.

Le but de l'intervalle de fluctuation est de savoir si l'échantillon est représentatif de la population totale.

On a pu observer deux conclusions de types différents :

- L'échantillon est, ou n'est pas, représentatif de la population (on est sûr de p) ;
- La valeur annoncée de p semble vraie ou fausse (on n'est pas sûr de p).

Il y a trois intervalles à connaître (au seuil 0,95).

- Le seul intervalle exact est celui de première (mais il demande plus de travail) ;
- Le moins précis est celui de seconde ;
- Celui de terminale est asymptotique (on s'approche du seuil 0,95 quand n est grand).

L'évaluation des risques d'erreurs :

- Si f est dans l'intervalle et que l'on valide l'hypothèse, on a 95% de chance d'avoir raison ;
- Si f n'est pas dans l'intervalle et que l'on rejette l'hypothèse, on a 5% de chance de se tromper ;
- Dans les autres cas on ne peut pas conclure.

2. Confiance

Ici, la proportion dans la population totale p est inconnue et on cherche à l'estimer.
On obtient une fréquence f dans un échantillon, à partir de laquelle on détermine l'intervalle.

L'intervalle de confiance contient la valeur p avec une probabilité (au moins) égale à 0,95.

Les conditions à vérifier sont celles de l'intervalle de fluctuation de terminale.

II. Lois à densité

1. De manière générale

Une variable X qui suit une loi à densité prend ses valeurs dans des intervalles.
On dit qu'elle est continue.
Elle possède une fonction de densité f.
Cette fonction de densité vérifie :

- f est positive ;

- l'aire sous la courbe représentative de f vaut 1.

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) &= \int_a^b f(t)dt \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

où F est la fonction de répartition de X, c'est à dire $F(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a)$.
F est en fait une primitive de f.

2. Loi uniforme

La fonction de densité est constante sur un intervalle $[a;b]$ et ailleurs elle vaut 0.
La variable aléatoire X qui suit une loi uniforme prend donc ses valeurs sur l'intervalle $[a;b]$ de manière uniforme.

3. Loi normale

Cette loi a deux paramètres :
- la moyenne μ ;
- l'écart type σ.

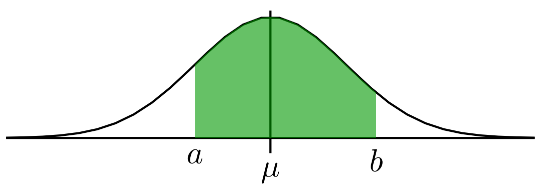
La notation en terminale est $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
Ainsi, si X suit la loi $\mathcal{N}(30;100)$, alors $\sigma = \sqrt{100} = 10$.

Une loi particulière : la loi $\mathcal{N}(O;1)$. Elle est **centrée** ($\mu = 0$) et **réduite** ($\sigma = 1$).

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$.

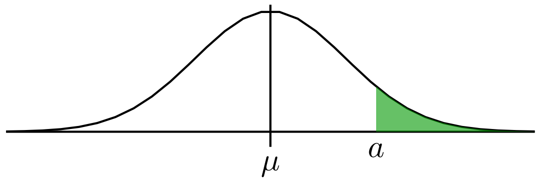
La fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ est définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Utiliser une « courbe en cloche » pour visualiser les probabilités demandées :
- $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$
  s'obtient à l'aide d'une calculatrice :
  - Casio : NormCD(a,b,σ,μ)
  - T.I. : NormalFRep(a,b,μ,σ)

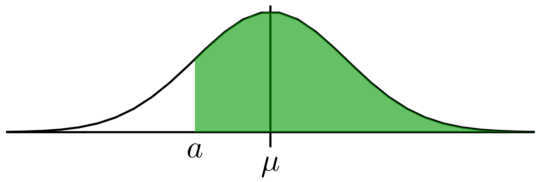


- $\mathbb{P}(X \geqslant a)$:

    * Si $a > \mu$ on calcule $\dfrac{1}{2} - \mathbb{P}(\mu \leqslant X \leqslant a)$

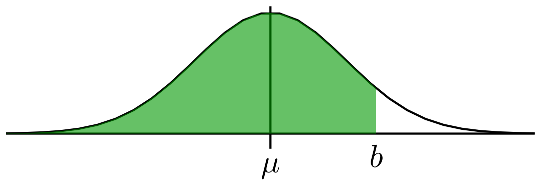


    * Si $a < \mu$, on calcule $\dfrac{1}{2} + \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant \mu)$.

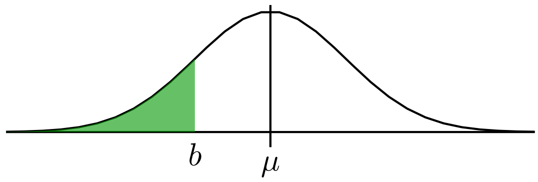


- $\mathbb{P}(X \leqslant b)$:

    * Si $b > \mu$ on calcule $\dfrac{1}{2} + \mathbb{P}(\mu \leqslant X \leqslant b)$



    * Si $b < \mu$, on calcule $\dfrac{1}{2} - \mathbb{P}(b \leqslant X \leqslant \mu)$.



III. Suites

1. Généralités

Deux manières de définir une suite :
- De manière explicite (u_n en fonction de n) ;
- Par récurrence (u_{n+1} en fonction de u_n).

2. Trois types de suites étudiées

a. Suites géométriques

Le terme général est donné par : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$ $(n \geqslant p)$

La relation de récurrence est $u_{n+1} = q \times u_n$.

Méthode Comment prouver qu'une suite est géométrique ?
- Si elle est définie de l'une des deux formes données plus haut, cela suffit à l'affirmer
- Sinon, on exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on prouve que cette expression est constante.
  Il peut suffire d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis de simplifier, à moins que l'on passe par une autre suite (voir les suites arithmético-géométriques à la sous-section III2csubsubsection)

  ⚠ Montrer que $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1}$ ne suffit : il faut faire une preuve générale.

Méthode Comment prouver qu'une suite n'est pas géométrique ?

On calcule des quotients de termes successifs de la suite et on en donne deux différents.
Par exemple, $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ (mais il faut parfois aller plus loin).

Il existe une formule dans le cours pour ajouter les termes d'une suite géométrique.

Les variations sont connues (en TES) pour les suites positives.
Elles dépendent de la raison q :

- Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante ;
- Si $q > 1$, la suite est croissante.

Les limites sont données avec les mêmes critères :

- Si $0 < q < 1$, la limite est 0 (on dit que la suite converge) ;
- Si $q > 1$, la limite est $+\infty$ (on dit que la suite diverge).

La somme des termes a elle aussi une limite :

- Si $0 < q < 1$, la limite de S_n est $\dfrac{u_0}{1-q}$;
- Si $q > 1$, la limite de S_n est $+\infty$.

b. Suites arithmétiques

Le terme général est donné par : $u_n = u_0 + r \times n$ ou $u_n = u_p + r \times (n-p)$ $(n \geqslant p)$
On peut remarquer que cette expression est une expression affine (de la variable n).

La relation de récurrence est $u_{n+1} = u_n + r$.

Méthode Comment prouver qu'une suite est arithmétique ?

- Si elle est définie de l'une des deux formes données plus haut, cela suffit à l'affirmer
- Sinon, on exprime $u_{n+1} - u_n$ et on prouve que cette expression est constante.

Montrer que $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ ne suffit : il faut faire une preuve générale.

Méthode Comment prouver qu'une suite n'est pas géométrique ?
On calcule des différences de termes successifs de la suite et on en donne deux distinctes.
Par exemple, $u_3 - u_2 \neq u_2 u_0$.

Il existe une formule dans le cours pour ajouter les termes d'une suite arithmétique.

c. Suites arithmético-géométriques

Uniquement la relation de récurrence à connaître : $u_{n+1} = a \times u_n + b$.
(une expression affine ici aussi, mais sur une relation de récurrence)

L'exercice type pour ces suites est le suivant :
On cherche à déterminer la forme explicite de la suite, puis sa limite.
Pour cela, on nous donne une suite v définie à partir de u, et on doit démontrer qu'elle est géométrique.
Le déroulement est toujours le même :
v est définie par une expression de la forme $v_n = u_n - c$ avec c constante (que l'on peut déterminer soi-même, voir plus loin).
Ainsi la méthode suivante fonctionne toujours :

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-c}{u_n-c} \qquad \text{(écrire } v \text{ en fonction de } u\text{)}\\
&= \frac{au_n+b-c}{u_n-c} \qquad \text{(remplacer } u_{n+1} \text{ par } au_n+b\text{)}\\
&= \frac{a\left(u_n+\frac{b-c}{a}\right)}{u_n-c} \qquad \text{(factoriser par } a\text{)}\\
& \text{En principe, } -c=\frac{b-c}{a} \text{ (} c \text{ est solution de } c=ac+b\text{) donc,}\\
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= a
\end{aligned}
$$

Autrement dit v est géométrique de raison a.
Par suite, $v_n = v_0 \times a^n$, où $v_0 = u_0 - c$.
Finalement, $u_n = v_n + c = v_0 \times a^n + c$.
La limite est soit $+\infty$, soit c, et cela selon la valeur de a.

IV. Fonctions

1. Généralités

Il faut connaître l'équation de la tangente :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

où a est l'abscisse du point de la courbe par lequel passe la tangente.

Le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$

Méthode Pour connaître les variations d'une fonction f, on calcule sa dérivée f' et on étudie de signe de f'.

Méthode Pour dériver une fonction, il faut connaître les formules, et toujours observer la forme de la fonction pour appliquer la formule qui s'y rapporte.
Il peut y avoir plusieurs étapes nécessaires pour dériver, dans le cas où les éléments qui composent f sont eux-mêmes composés.

Méthode Pour étudier le signe de f' (ou d'une expression en général) :
On observe la forme de la fonction. Plusieurs cas donnés par ordre croissant de difficulté (difficile de tous les énumérer cependant) :

- Exponentielles, racines carrées, carrés : sont toujours positifs.
- Forme affine $ax + b$.
  On résout $ax + b > 0$.

  ⚠ Attention au moment où l'on divise par a : penser à son signe !

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

cas où $a < 0$

- Forme polynomiale de degré 2.
  On détermine les racines (éventuellement en calculant Δ).
  Le signe de l'expression est alors donné en fonction des racines et du signe de a.

  Remarque Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines, et l'expression est toujours du signe de a.

- Certains cas un peu plus complexes se traitent en résolvant une inéquation.

  Exemple $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et autres types d'inéquations avec le logarithme (voir la sous-section IV5subsection sur le logarithme)

  ⚠ Un logarithme n'est pas toujours positif !

  Exemple $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ et autres types d'inéquations avec l'exponentielle (voir la sous-section IV4subsection sur l'exponentielle)

  ⚠ si l'exponentielle est positive, une expression avec l'exponentielle ne l'est pas forcément !
- Le signe d'un produit (ou d'un quotient) s'étudie grâce à un tableau de signes.
  On étudie le signe de chacun des facteurs, qui le plus souvent ont des expressions entrant dans les cas décrits précédemment.
- En général, le signe d'une somme (ou d'une différence) est difficile à étudier. Si on ne sait pas l'étudier, le plus souvent une aide est apportée dans l'exercice.
  Dans le cas contraire, on peut chercher à factoriser.

  Exemple $\ln(x) + x\ln(x) = \ln(x)(1+x)$.

  On est alors ramené à l'étude du signe d'un produit.

2. Continuité

Toutes les fonctions de référence vues en TES sont continues sur leur ensemble de définition.
Pour les fonctions définies par morceaux, on vérifie qu'aux valeurs de x où l'expression change, les images sont les mêmes à gauche et à droite.

La continuité est une hypothèse nécessaire pour le théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque Dans une question du type « Prouver qu'il existe **une unique** solution de $f(x) = 0$ », penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
Inutile de chercher à résoudre l'équation : ce sera impossible en général, ou très difficile.

3. Convexité

- f est convexe si :
  * les tangentes sont en dessous de la courbe ;
  * Tout segment reliant les deux points est au dessus de la courbe ;

    * f' est **croissante** ;
    * f'' est positive.
- f est concave si :
    * les tangentes sont au dessus de la courbe ;
    * Tout segment reliant les deux points est en dessous de la courbe ;
    * f' est **décroissante** ;
    * f'' est positive.
- En un point d'inflexion :
    * f'' s'annule en **changeant de signe** ;
    * f' change de variations (elle admet un maximum ou un minimum local) ;
    * la tangente traverse la courbe.

4. Exponentielle

Une exponentielle est strictement positive, quelque soit l'expression à l'intérieur : $e^u > 0$.

e^u a les mêmes variations que u, mais pas les mêmes images :
Si $u(2) = 1$, alors $(e^u)(2) = e^{u(2)} = e^1 = e$.

Pour résoudre des (in)équations :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$
$$e^a \geqslant e^b \Leftrightarrow a \geqslant b$$

Exemple

$$\begin{aligned} e^x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad e^x = e^{\ln(5)} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln(5) \end{aligned}$$

5. Logarithme

⚠ ln est définie pour des nombres positifs uniquement (sur $]0;+\infty[$) **mais** ln **n'est pas positif !**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Pour résoudre des (in)équations :
$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$
$$\ln(a) \geqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \geqslant b$$

Exemple

$$\begin{aligned} \ln(x) \geqslant -4 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(x) \geqslant \ln\left(e^{-4}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant e^{-4} \end{aligned}$$

⚠ Quand on résout des (in)équations avec un logarithme, il faut avant toute chose déterminer l'ensemble de définition de celles-ci.

Remarque les fonctions ln et exp sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
De plus,

- Le logarithme transforme un produit en somme :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

- L'exponentielle, au contraire, transforme une somme en produit :

$$e^{(a+b)} = e^a \times e^b$$