Méthodes utiles en TS

∽

Cette fiche n'est pas un cours minimal, ni une recette miracle. Cependant connaître son contenu est important, car il permet de guider le raisonnement. Si, en lisant son contenu, certains points ne vous paraissent pas clairs, c'est qu'il faut revoir ces points, en relisant le cours ou en refaisant des exercices, pour bien les comprendre.
Avant tout, la première des méthodes est de connaître le cours et les formules !

Table des matières

I. Étude de signe

1. Utilité

- Connaître le signe d'une fonction f, c'est pouvoir déterminer si un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse donnée x est au dessus ou au dessous de l'axe des abscisses, autrement dit respectivement si $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$.
- Plus généralement, pour étudier la position relative des deux courbes représentatives des fonctions f et g, on se ramène à l'étude d'un signe. En effet :
$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ si et seulement si $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0$ ($f - g$ est positif).
- Étudier le signe d'une dérivée f' permet de connaître les variations de la fonction f (voir IV3subsection).
- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ permet de connaître les variations de la suite u (voir IIIsection).

2. Méthodes

Les expressions dont on sait déterminer le signe :

- celles de la forme $ax + b$: on résout par exemple $ax + b \geqslant 0 \Leftrightarrow ax \geqslant -b$ (I) ;

  Lorsque l'on divise par a, le signe de a peut faire changer le sens de l'inégalité :
  - $*$ Si $a > 0$, alors $(I) \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{b}{a}$;
  - $*$ Si $a < 0$, alors $(I) \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{b}{a}$.

  On peut aussi indiquer les variations de la fonction associée (croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$), puis résoudre simplement l'équation : $ax + b = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{b}{a}$.
  Pour résumer :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

cas où $a < 0$

- celles de la forme $ax^2 + bx + c$ (grâce aux racines et au signe de a) ;

  Remarque Pour obtenir les racines, le calcul du discriminant Δ n'est pas toujours obligatoire, en particulier quand il n'y a que deux termes. Voir II1subsection pour plus de détails.

  L'expression est **généralement** du signe de a (sauf entre les éventuelles racines).
- Un carré est toujours positif : $(\dots)^2 \geqslant 0$;
- Une racine carrée est toujours positive : $\sqrt{\dots} \geqslant 0$;
(ne pas confondre avec le fait que ce qui est dans la racine carrée **doit** être positif pour que la racine carrée existe)
- Une exponentielle est toujours strictement positive : $e^{\cdots} > 0$;
- Le signe d'un produit ou d'un quotient d'expressions précédentes s'étudie grâce à un tableau de signes, après avoir étudié le signe de chacun des facteurs.

⚠ Un nombre inconnu écrit sous la forme $-A$ peut tout à fait être positif (lorsque $A < 0$).

⚠ Il est très difficile d'obtenir le signe d'une somme (ou d'une soustraction) en général.
En particulier, sans précision on ne connaît pas le signe de la **somme** de deux termes de signes opposés. On sait seulement que la somme de deux expressions positives (resp. négatives) est positive (resp. négative). C'est pour cela qu'en général on cherche plutôt à factoriser les expressions dont on cherche à connaître le signe.

⚠ Ne jamais faire de tableau de signe pour une somme, les règles ne sont pas les mêmes que pour le produit !

En dernière extrémité, on essaie de résoudre une inéquation. Autrement dit si l'on cherche le signe d'une expression $A(x)$, on résout $A(x) > 0$. Voir II2subsection pour les méthodes.

II. Résolution

1. Équations

a. Différents types

Les types d'équations que l'on peut résoudre :

- Du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$. Les solutions sont appelées racines.

  Remarque Généralement on calcule le discriminant Δ pour obtenir les racines, mais on peut éviter si $b = 0$ ou $c = 0$.
  - $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$ qui se résout simplement (produit nul) ;
  - $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a}$ se résout (sans oublier de solution !) rapidement.

- Du premier degré : $ax + b = cx + d$.
  On fait en sorte de regrouper les inconnues d'un côté, les constantes de l'autre. Pour cela, voir les méthodes générales plus bas (**II1bsubsubsection**).
- Les équations qui s'écrivent sous la forme d'un produit nul $A \times B = 0$. On utilise le fait qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul. On se retrouve alors à devoir résoudre deux (ou plus) équations.
- Pour les équations avec l'exponentielle, on essaie de se ramener à une équation de la forme $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$ ou bien $e^A = k \Leftrightarrow A = \ln k$ (seulement si $k > 0$!).
  Pour cela on peut avoir besoin des formules comme $e^a e^b = e^{a+b}$.
- Pour les équations avec le logarithme, on essaie de se ramener à une équation de la forme $\ln(A) = \ln(B) \Leftrightarrow A = B$, ou bien $\ln(A) = k \Leftrightarrow e^{\ln(A)} = e^k \Leftrightarrow A = e^k$.
  Pour ce faire, on applique les formules comme $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$.

  ⚠ Une fois que l'on a trouvé des solutions éventuelles, **on vérifie** si les expressions dans les logarithmes de l'équation de départ sont strictement positives pour ces valeurs.

⚠ On ne résout pas une équation de la forme $f(x) = k$ si la question est posée sous la forme : « Démontrer qu'**il existe une (unique) solution** ».

Il est très vraisemblable qu'il faut alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, qui ne donne pas la solution, mais permet d'affirmer son existence.
Bien remarquer la nuance entre « résoudre l'équation » et « démontrer qu'il existe une solution ».
La solution se donne alors avec la calculatrice ; il est le plus souvent impossible de la trouver par les méthodes suivantes.

b. Méthodes

On raisonne par équivalence en appliquant des opérations sur **les deux membres** de l'équation.

- Les opérations de calcul sont les suivantes :
  - Ajouter (ou soustraire) une expression ;
  - Multiplier (ou diviser) par un nombre **non nul** (en particulier, en principe pas par l'inconnue).
- On peut aussi appliquer la fonction inverse si les membres de l'équation se sont pas nuls ;
- Pour accéder à une inconnue située dans un exposant d'un nombre strictement positif, on peut appliquer le logarithme.

⚠ Pas d'opération *locale* : on applique l'opération à **toute** l'expression. Pour passer de $5x+3$ à x, on doit donc d'abord soustraire 3 puis diviser par 5 et pas le contraire, car commencer par diviser par 5 entraîne de diviser aussi 3 par 5 : $x+\dfrac{3}{5}$.

2. Inéquations

Ne pas oublier que dans certains cas, résoudre une inéquation, c'est seulement déterminer un signe, puisque par exemple résoudre $A>0$ c'est chercher quand A est positif (voir Isection).

De même que pour les équations, on peut faire des opérations sur les deux membres d'une inéquation, en conservant l'équivalence.

- Les opérations de calcul sont les suivantes :
  - Ajouter (ou soustraire) une expression : aucune influence sur le sens de l'inégalité ;
  - Multiplier (ou diviser) par un nombre **non nul** (en particulier, en principe pas par l'inconnue). Le sens de l'inégalité change si (et seulement si) le nombre est négatif ;
- On peut également appliquer une fonction monotone. Si l'on utilise une fonction :
  - croissante, on conserve le sens de l'inégalité ;
  - décroissante, on change le sens de l'inégalité.

Remarque En fait, on peut voir les opérations comme l'application d'une fonction :

- Ajouter une constante c revient à appliquer la fonction affine $x \mapsto x+c$ croissante ;
- Multiplier par une constante $a \neq 0$ revient à appliquer la fonction affine $x \mapsto ax$, dont les variations dépendent du signe de a.

⚠ Appliquer une fonction monotone fait perdre *a priori* l'équivalence.
En effet, la définition est : « **si** $x \leqslant y$ et f est croissante, **alors** $f(x) \leqslant f(y)$ ». Ce n'est donc qu'une implication, pas une équivalence. Pour avoir l'équivalence, il faut pouvoir également appliquer une fonction monotone dans l'autre sens.

Exemple Si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant 1$ car la fonction carrée est croissante sur $[0;+\infty[$. Mais la réciproque est fausse. On a en effet :

$$x^2 \geqslant 1 \Rightarrow |x| \geqslant 1 \qquad \text{(la fonction racine carrée est croissante sur } [0;+\infty[)$$

La racine carrée de x^2 n'est pas x mais $|x|$ (valeur absolue de x).
Par suite, $|x| \geqslant 1$ revient à « $x \geqslant 1$ **ou** $x \leqslant -1$ ».

L'équivalence est donc :

$$x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ ou } x \leqslant -1$$

Cependant, si l'on résout dans $[0; +\infty[$ (autrement dit si on sait que x est positif), la première implication est alors une équivalence.

<u>Méthode</u> (Cas des inéquations avec le logarithme) Il y a plusieurs étapes à ne pas oublier :

- **première étape :** Déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation, c'est-à-dire déterminer les valeurs de x pour lesquelles toutes les expressions situées dans les logarithmes sont strictement positives.

  Cela revient en général à une intersection d'intervalles.
- **deuxième étape :** Se ramener à une inéquation d'une formme telle que $\ln(A) \leqslant \ln(B)$ ou $\ln(A) \leqslant k$ (voir II1subsection).
- **dernère étape :** Donner l'ensemble des solutions qui sont dans l'ensemble de définition.

III. Suites

1. Généralités

Deux manières de définir une suite :

- De manière explicite (u_n en fonction de n) ;
- Par récurrence (u_{n+1} en fonction de u_n).

2. Deux (plus un) types de suites étudiées

a. Suites arithmétiques

Deux définitions :

- Explicite : : $u_n = u_0 + r \times n$ ou $u_n = u_p + r \times (n - p)$ $(n \geqslant p)$

  On peut remarquer que cette expression est une expression affine (de la variable n).
- Par récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$.

r, constante, est la raison de la suite.

<u>Méthode</u> Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

- Si elle est définie de l'une des deux formes données plus haut, cela suffit à l'affirmer
- Sinon, on exprime $u_{n+1} - u_n$ et on démontre que cette expression est constante.

  ⚠ Montrer que $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ ne suffit pas : il faut faire une preuve générale (n quelconque).

<u>Méthode</u> Comment démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique ?
On calcule des différences de termes successifs de la suite et on en donne deux distinctes.
Par exemple, $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_0$.

Les variations des suites arithmétiques dépendent de la raison r :

- Si $r > 0$, la suite est croissante ;
- Si $r < 0$, la suite est décroissante.

Il existe une formule dans le cours (de première) pour ajouter les termes d'une suite arithmétique.

b. Suites géométriques

Deux définitions :

- Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$ $(n \geqslant p)$
- Par récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$.

q, constante, est la raison de la suite.

Méthode Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

- Si elle est définie de l'une des deux formes données plus haut, cela suffit à l'affirmer
- Sinon, on exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on démontre que cette expression est constante.
  Il peut suffire d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis de simplifier, à moins que l'on passe par une autre suite (voir les suites arithmético-géométriques à la sous-section III2**c**subsubsection)

  Montrer que $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1}$ ne suffit : il faut faire une preuve générale (n quelconque).

Méthode Comment démontrer qu'une suite n'est pas géométrique ?
On calcule des quotients de termes successifs de la suite et on en donne deux différents.
Par exemple, $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ (mais il faut parfois aller plus loin).

Il existe une formule dans le cours (de première) pour ajouter les termes d'une suite géométrique.

Les variations sont connues pour les suites **positives**, sachant que la suite est positive si $q > 0$ et si le premier terme u_0 est positif.
Elles dépendent de la raison q :

- Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante ;
- Si $q > 1$, la suite est croissante.

c. Suites arithmético-géométriques

Ce sont les suites définies par : $u_{n+1} = a \times u_n + b$.
(une expression affine ici aussi, mais sur une relation de récurrence)

L'exercice type pour ces suites est le suivant :
On cherche à déterminer la forme explicite de la suite, puis sa limite.
Pour cela, on nous donne une suite v définie à partir de u, et on doit démontrer qu'elle est géométrique.
Le déroulement est toujours le même :
v est définie par une expression de la forme $v_n = u_n - c$ avec c constante (que l'on peut déterminer soi-même, voir plus loin).
Ainsi la méthode suivante fonctionne toujours :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-c}{u_n-c} \qquad \text{(écrire } v \text{ en fonction de } u\text{)} \\
&= \frac{au_n+b-c}{u_n-c} \qquad \text{(remplacer } u_{n+1} \text{ par } au_n+b\text{)} \\
&= \frac{a\left(u_n+\frac{b-c}{a}\right)}{u_n-c} \qquad \text{(factoriser par } a\text{)} \\
& \text{En principe, } -c = \frac{b-c}{a} \text{ (} c \text{ est solution de } c = ac+b\text{) donc,} \\
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= a
\end{aligned}$$

Autrement dit v est (toujours) géométrique de raison a.
Par suite, $v_n = v_0 \times a^n$, où $v_0 = u_0 - c$.
Finalement, $u_n = v_n + c = v_0 \times a^n + c$.

3. Variations

Pour les suites arithmétiques et géométriques, on connaît le critère depuis la première (voir les sous-sections respectives plus haut).

De manière générale, les variations de u sont données par le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Plus précisément,

- si quelque soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0$, alors u est croissante.
- si quelque soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$, alors u est décroissante.

Le plus souvent on commence par remplacer u_{n+1} par sa définition (donnée en général par récurrence).
Voir Isection pour l'étude d'un signe.

Remarque Ne pas oublier que dans le cas des suites, on a forcément $n \geqslant 0$, puisque $n \in \mathbb{N}$.

Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante : elle est alors non monotone.

Le calcul des 3 (voire des 1 000) premiers termes ne suffit pas à conclure (sauf pour dire que la suite n'est pas monotone).

On ne connaît *a priori* pas le signe de u_n en général. Cependant :

Remarque **Si est positive**, alors on peut utiliser le critère (plutôt rare) suivant :
u est croissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
En effet, si $u_n > 0$, l'inégalité est équivalente à $u_{n+1} > u_n$, soit à $u_{n+1} - u_n > 0$.

Méthode On peut utiliser la propriété suivante :

Propriété Si $u_n = f(n)$ et si f est monotone, alors u l'est aussi et a les mêmes variations que f.

Il s'agit alors d'étudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x)$, éventuellement en commençant par la dériver (voir IV3subsection).

Si f n'est pas monotone, on ne peut pas conclure immédiatement que u ne l'est pas.

Si la suite est définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on **ne peut pas conclure** sur les variations de u en étudiant celles de f. Il existe un critère, mais il est dangereux et hors programme.

4. Limites

On s'intéresse aux valeurs que prend le terme u_n quand n tend vers l'infini, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

- soit la suite **converge**, c'est à dire qu'elle a une **limite finie** ;
- soit la suite **diverge**. Deux cas :
  - $*$ elle a une limite infinie : $+\infty$ ou $-\infty$;
  - $*$ elle n'a pas de limite, comme par exemple si $u_n = (-1)^n$.

À connaître, la limite d'une expression de la forme q^n, qui dépend de q.

Rappel Les cas sont les suivants :

- $-1 < q < 1$: la limite est 0 ;
- $q > 1$: la limite est $+\infty$;

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ q \leqslant -1 : \text{diverge sans limite ;} \\ \bullet\ q = 1 : \text{la limite est } 1. \end{array}\right\} \text{Rares}$$

a. Méthodes pour déterminer les limites

Par ordre de priorité à envisager :

1. En utilisant les règles de calculs sur les limites. Connaître les opérations.
   C'est la première chose à tester, dans tous les cas.
   Les autres méthodes sont à appliquer seulement en cas d'échec de celle-ci.

   Il faut être capable de reconnaître une forme indéterminée (voir **III4bsubsubsection**).
2. Par **comparaison** :
   (a) Avec **une** autre suite, dans le cas des **limites infinies**.
   Si on sait que $u_n \geqslant v_n$, deux cas où l'on peut conclure :
   - si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$;
   - si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$;

   (b) Par utilisation du **théorème des gendarmes**, dans le cas de **limites finies**.

   Rappel On suppose que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
   Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ (limite finie), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

   Quand on a obtenu un encadrement et que l'on cherche une limite, il faut sûrement appliquer ce théorème.
   Parfois, on doit trouver l'encadrement de u_n soi-même, comme quand il contient $\sin(\dots)$, $\cos(\dots)$ ou $(-1)^n$.
3. Par la définition pour les suites simples (rare).
   Voir **III4csubsubsection** pour son utilisation.

b. Formes indéterminées

Rappel Les formes indéterminées sont les suivantes :

$$+\infty + (-\infty) \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \times \infty$$

Dans le cas d'une forme indéterminée, il faut réécrire l'expression pour ne plus avoir de forme indéterminée (on dit lever l'intéterminée).

- Pour une forme polynomiale, on factorise par le terme du plus haut degré. On se retrouve avec une forme $\infty \times l$ (avec $l \neq 0$).

  Exemple

$$\begin{aligned} u_n = 4n^4 - 3n^2 + 5n - 7 &= n^4\left(4 - 3\frac{n^2}{n^4} + 5\frac{n}{n^4} - \frac{7}{n^4}\right) \quad \text{(factorisation)} \\ &= n^4\left(4 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3} - \frac{7}{n^4}\right) \quad \text{(simplification)} \end{aligned}$$

  Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3} - \frac{7}{n^4} = 4 + 0 = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Pour une fraction de polynômes (appelée aussi fonction rationnelle), même méthode, mais **indépendamment** pour le numérateur **et** le dénominateur.

  Exemple

$$\begin{aligned} u_n = \frac{5n^2 - n}{3n^2 + 2} &= \frac{n^2\left(5 - \frac{n}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{2}{n^2}\right)} \quad \text{(factorisation)} \\ &= \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n^2}} \quad \text{(séparation)} \\ &= 1 \times \frac{5 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n^2}} \quad \text{(simplification)} \end{aligned}$$

  Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{5-0}{3+0} = \frac{5}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$.

  On peut retenir cela :
  * Si le numérateur a un degré plus élevé, la limite est $\pm\infty$;
  * Si le numérateur a un degré moins élevé, la limite est 0 ;
  * Si le degré est le même, la limite est une constante non nulle.

- Plus généralement, une règle qui fonctionne généralement, donc à retenir, est que :

  « C'est le plus fort qui l'emporte »

  Cela fonctionne donc avec d'autres expressions (des racines carrées, des exponentielles,...).

  Exemple Soit à déterminer la limite de $u_n = \frac{3^n - 5^n}{2^n}$:

$$\begin{aligned} \frac{3^n - 5^n}{2^n} &= \frac{5^n \times \left(\frac{3^n}{5^n} - 1\right)}{2^n \times 1} \\ &= \frac{5^n}{2^n} \times \left(\frac{3^n}{5^n} - 1\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^n \times \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right) \end{aligned}$$

  Or $\frac{5}{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$.

De plus, $-1 < \dfrac{3}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^n - 1\right) = -1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c. Utilisation de la définition de limite

Si on utilise la définition de limite, il y a deux cas :

- Si on cherche la limite, on commence par :
  Soit $a > 0$ ...
  Ici, a est quelconque, donné à l'avance, on **ne le choisit pas**.
  On **cherche** alors un rang n_0 à partir duquel...
- Si on connaît la limite, alors **quelque soit** $a > 0$, il existe...
  On peut donc **choisir** une valeur de a qui nous convient ; cela nous **donne** alors (l'existence d')un rang n_0 à partir duquel...

5. Récurrence

La méthode de rédaction, donnée en cours, est à connaître parfaitement.
En particulier, ne pas oublier de définir la propriété $\mathcal{P}(n)$ avant de commencer la démonstration.
D'autre part, lors de l'étape de récurrence, il faut bien identifier ce qu'il faut démontrer ($\mathcal{P}(n+1)$) et de que l'on sait (l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$).

6. Minorants et majorants

a. Démonstration

Méthode Pour démontrer qu'une suite est minorée ou majorée par un nombre m donné, on peut chercher à étudier le signe (voir Isection) de $u_n - m$:

- Si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n - m \leqslant 0$, alors u est majorée par m ;
- Si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n - m \geqslant 0$, alors u est minorée par m.

Exemple Soit $u_n = n^2 - 2n + 3$. Démontrons que u est minorée par 2.
On étudie donc le signe de $u_n - 2$:

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= n^2 - 2n + 3 - 2 \\ &= n^2 - 2n + 1 \\ &= (n-1)^2 \geqslant 0 \quad \text{(un carré est toujours positif)} \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n \geqslant 2$, donc u est bien minorée par 2.

Parfois, l'inégalité $u_n \geqslant 2$ sera plus facilement démontrée par récurrence.

Il faudrait vérifier la validité de l'idée suivante :
Généralement,

- Si u est définie par récurrence, alors on peut faire une preuve par récurrence ;
- Si u est définie de manière explicite, alors on peut faire une preuve directe.

Méthode (indirecte, par propriété)

- Si u est une suite croissante et convergente, alors u est majorée par sa limite
- De manière similaire, si u est décroissante et convergente, alors u est minorée par sa limite.

Rappel

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

- Tout suite décroissante est majorée par son premier terme.

b. Utilité

Une suite monotone bornée est convergente, donc on en déduit l'existence d'une limite :

Rappel
- Si une suite est croissante et majorée, alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors elle converge.

⚠ On ne sait cependant pas quelle est la limite par ce moyen.

7. Utilisation du signe somme $\sum$

Penser que :
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} E(i) = \left(\sum_{i=1}^{n} E(i)\right) + E(n+1)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(i) = E(1) + \left(\sum_{i=2}^{n} E(i)\right)$;
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} E(i+1) = \sum_{j=1}^{n+1} E(j)$ (changement de variable $j = i+1$) ;
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} E(i) = \sum_{j=0}^{n} E(j)$ (le nom de la variable n'a pas d'importance) ;
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (E(i) + F(i)) = \left(\sum_{i=0}^{n} E(i)\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} F(i)\right)$.

IV. Fonctions

1. Dérivation

Pour déterminer la dérivée de f, la première question à se poser est : « de quelle forme est f » ?
- S'il s'agit d'une somme de fonctions dérivables directement, comme les fonctions polynomiales, alors on dérive directement ;
- S'il s'agit d'une somme de fonctions composées, on identifie chaque fonction composée que l'on dérive séparément, puis l'on ajoute les dérivées ;
- S'il s'agit d'un produit, on identifie les fonction u et v et on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$;
- S'il s'agit d'un quotient, on identifie les fonctions u et v et on applique la formule $\displaystyle\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

  Remarque Laisser v^2 sous forme de carré, puisque l'on sait que c'est alors positif, ce qui est une information importante sur la dérivée.

- S'il s'agit d'une fonction de la forme e^u, on identifie u et on applique la formule $(e^u)' = u'e^u$.

Remarque Éviter d'utiliser la forme $\dfrac{u}{v}$ si u ou v est constante :

- Si u est une constante k, alors on a $k \times \dfrac{1}{v}$, qui a pour dérivée $k \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)$;

- Si v est une constante k, alors on a $\frac{1}{k}u$, qui a pour dérivée $\frac{1}{k}u' = \frac{u'}{k}$.

Remarque Les fonctions u et v peuvent elles aussi être composées et donc nécessiter encore l'utilisation d'une formule de dérivation. Faire alors attention à utiliser d'autres noms de fonctions comme (par ordre de préférence) w, f, g, h, k, l,... éventuellement avec des indices comme w_1, w_2,...

2. Représentation graphique

a. Méthodes

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction, on peut faire une ou plusieurs des choses suivantes :

- Faire un tableau de valeurs (on peut s'aider de la calculatrice) ;
- Étudier les variations de la fonction (voir IV3subsection) ;
- Utiliser les tangentes pour s'aider (voir **IV2bsubsubsection**).

b. Tangentes

L'équation de tangente est à connaître : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

⚠ Ne pas oublier le « $y =$ » : Le mot « **équa**tion » contient le mot **égal**ité !
Une tangente peut aider à tracer la courbe représentative de la fonction, localement au point de tangence.

c. Asymptotes

Les asymptotes permettent également de tracer la courbe représentative de la fonction, puisqu'elles donnent l'allure de la courbe.
Il y a deux types d'asymptotes étudiées :

- Horizontale, d'équation $y = l$, lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ (finie) ;
- Verticale, d'équation $x = a$, lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ est infinie.

La courbe ne coupe jamais une asymptote verticale, mais peut couper une asymptote horizontale.

Méthode Pour une asymptote horizontale, on peut chercher à déterminer la position relative de la courbe représentative de f et de l'asymptote.
Pour cela, on étudie le signe (voir Isection) de $f(x) - l$.

- Si $f(x) - l > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote ;
- Sinon, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote.

3. Variations

a. Fonctions de référence

On connaît, ou l'on sait déterminer, les variations des fonctions suivantes :

- La fonction carrée $x \mapsto x^2$;
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$;
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$;
- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$
(qui dépendent du signe de a) ;
- Les fonctions polynomiales de degré 2 $x \mapsto ax^2 + bx + c$

(elles dépendent du signe de a et de l'abscisse du sommet : $\dfrac{-b}{2a}$) ;
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$;
- Une fonction de la forme e^u a les mêmes variations que u (mais pas les mêmes images !).

b. Fonctions quelconques

Pour déterminer les variations d'une fonction f, on peut commencer par calculer la dérivée f' de f (voir IV1subsection), puis étudier le signe de la dérivée f' (voir Isection).
En effet :
- Si quelque soit $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I ;
- Si quelque soit $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

c. Extrema

Pour déterminer les extrema d'une fonction f, on étudie les variations de f.
La lecture du tableau de variations permet alors généralement de déterminer le maximum et le minimum (s'ils existent).
La propriété suivante permet de trouver certains extrema :

Propriété Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en $x = a$, alors f admet un extremum local en $x = a$.

Ainsi donc, étudier le signe de la dérivée est le plus souvent la méthode à utiliser pour démontrer qu'une fonction a un maximum ou un minimum.
Cependant il faut aussi faire attention aux images des bords de l'ensemble de définition.

4. Limites

a. limites à l'infini

Les méthodes sont les mêmes que celles pour les suites (voir III4subsection), en particulier :
- la factorisation par le terme le plus fort ;
- les théorèmes de comparaison, le théorème des gendarmes.

b. limites en un réel a

- Si la fonction est définie en a et continue, il suffit de calculer l'image de a.
- Si la fonction n'est pas définie en a, il s'agit de déterminer la limite à droite et/ou la limite à gauche de a, autrement dit $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

  Le plus souvent, en remplaçant x par a, la limite est de la forme (ou contient) « $\dfrac{L}{0}$ » avec $L \neq 0$. Il faut alors déterminer le signe (voir Isection) du dénominateur pour pouvoir conclure, en sachant que (attention à ne pas l'écrire sur une copie) :

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

⚠ Ne pas factoriser par les termes de plus haut degré ici : c'est **inutile** !

Exemple Soit $f(x) = \dfrac{2x-5}{2-x}$. Déterminons la limite à droite de f en 2 :
$\lim\limits_{x \to 2} 2x - 5 = 2 \times 2 - 5 = 4 - 5 = -1$. Par suite, $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} 2 - x = 0^-$.
Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

V. Intégrales et primitives

1. Intégrales

a. Généralités

Savoir donner l'interprétation graphique de $\int_a^b f(t)dt$, autrement dit la définition de l'intégrale, pour une fonction **positive**.
Savoir que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et a pour dérivée f.

2. Primitives

a. Détermination

Si on nous propose une primitive F, inutile d'en chercher une : on calcule F', et on verifie que $F' = f$.

Sinon on identifie la forme de f.

- cas simples :
  - fonctions polynomiales ;
  - $\frac{1}{x}$;
  - e^x.
- Cas plus difficiles (quotients et produits particuliers) :
  - $\frac{u'}{u}$: $\ln u$;
  - $\frac{u'}{u^n}$ pour $n \geqslant 2$: $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$;
  - $u'u^n$ pour $n \geqslant 1$: $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$;
  - $\frac{u'}{\sqrt{u}}$: $2\sqrt{u}$;
  - $u'e^u$: e^u.

⚠ Il n'existe pas de formule pour un quotient $\frac{u}{v}$ ou un produit uv quelconques.

VI. Probabilités

1. Généralités

Penser, même si cela n'est pas demandé, à traduire les énoncés sous forme de probabilités.
La principale difficulté est de bien distinguer les probabilités conditionnelles (voir VI4subsection) des probabilités d'intersection.

Se rappeler que le mot clé « **au hasard** » traduit la présence d'une loi équirépartie, ce qui permet, essentiellement, de justifier l'utilisation de fractions et de compter des individus pour déterminer des probabilités.

Le fait que la loi soit équirépartie n'implique pas que la probabilité de n'importe quel événement est toujours la même !

2. Premières formules

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$

En général, $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Ce n'est le cas que si A et B sont **indépendants**.

3. Loi binomiale

La loi binomiale est une loi de probabilité qui dépend de deux paramètres, n et p.

Méthode Il faut savoir justifier qu'une variable suit une loi binomiale. Pour cela :

1. Mettre en évidence l'épreuve de Bernoulli (le choix d'**une** personne, le tirage d'**un** objet), en précisant :
   - la description de l'**événement succès** ;
   - la valeur de la probabilité de succès.
2. On indique que l'on répète un nombre de fois l'expérience **de manière indépendante**.
   Si l'indépendance n'apparaît pas clairement dans l'énoncé, on peut la justifier :
   - lorsqu'il s'agit de choix (ou tirages) **au hasard** et **avec remise**.
   - Si l'échantillon a été prélevé en une seule fois, c'est en principe parce que l'on considère que **la taille de la population totale est suffisamment grande** pour assimiler le choix (ou tirage) à un choix (ou tirage) au hasard et avec remise.

   L'expérience consiste alors en un *s*chéma de Bernoulli.
3. On précise enfin que l'on s'intéresse **au nombre de succès** X (le nom de la variable aléatoire), et donc que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n,p)$.

La calculatrice permet d'obtenir deux calculs de probabilités particuliers :

- $\mathbb{P}(X = k)$ En TI : binomFdp(n,p,k)
  En Casio : BinominalPD(k,n,p)
- $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ En TI : binomFRép(n,p,k)
  En Casio : BinominalCD(k,n,p)

Avec les modèles récents de Casio, on peut en plus résoudre l'inéquation :
$\mathbb{P}(X \leqslant a) = k$ d'inconnue a : InvBinomCD(k,n,p).
Pour faire la même chose avec les autre calculatrices, on peut définir une fonction :
Y1=BinominalCD(X,n,p) (pour Casio) ou Y1=BinomFRép(n,p,X) (pour TI),
puis regarder le tableau de valeurs de celle-ci pour trouver a (on cherche la plus petite valeur de X qui a une image supérieure ou égale à k).

Cela est utile en particulier pour déterminer des intervalles de fluctuation (voir VII1subsection).

4. Probabilités conditionnelles

La probabilité de A sachant B est définie par $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Méthode Dans les arbres de probabilité :

- On fait le produit le long d'une branche ;
- On ajoute les probabilités de chaque branche.

Conséquence : la formule des probabilités totales (qui se généralise) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\end{aligned}$$

⚠ Dans l'arbre, sont données les probabilités conditionnelles. Les intersections sont « au bout des branches ». Alors que dans un tableau à double entrée, sont données les intersections, pas les probabilités conditionnelles.

Mots clés associés aux probabilités conditionnelles : lorsque, parmi, sachant que, chez, quand, … .
Ainsi que les proportions « de » : les deux tiers des machines défectueuses sont de type A.
Il y a également certains énoncés comme : On choisit un individu qui réalise A. Déterminer la probabilité qu'il réalise B.

5. Lois continues

a. Généralités

Pour calculer des probabilités, penser à faire des figures pour représenter les probabilités connues et celles à calculer. Cela peut permettre de (re)trouver des formules par addition ou soustraction d'aires.

Méthode Pour démontrer qu'une fonction définie sur un intervalle I est une fonction de densité :

- Vérifier qu'elle est continue sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs ;
- Vérifier qu'elle est positive (voir Isection) ;
- Vérifier que l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses vaut 1 (voir Vsection).

b. Loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$

Connaître la fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et la probabilité (pour $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$) :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Sachant que l'on doit toujours se ramener à une probabilité de ce type.

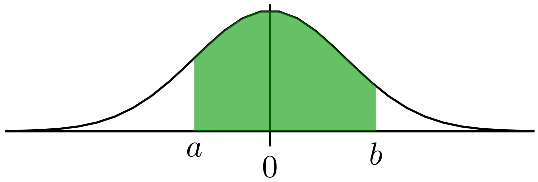
Exemple Soit c tel que $a \leqslant c \leqslant b$. Alors $\mathbb{P}(X \geqslant c) = \mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant b)$.

c. Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0{,}1)$

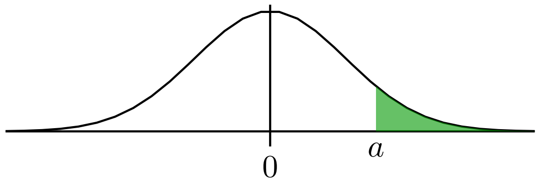
Cette loi est **centrée** (moyenne 0) et **réduite** (écart-type 1).

La fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ est définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

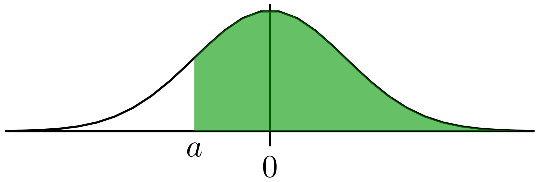
- Détermination de probabilités :
  Utiliser une « courbe en cloche » pour visualiser les probabilités demandées.
  - $*$ $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$
    s'obtient à l'aide d'une calculatrice :
    - · Casio : NormCD(a,b)
    - · T.I. : NormalFRep(a,b)



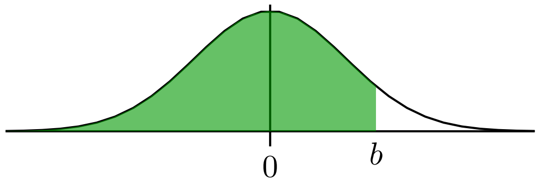
  - $*$ $\mathbb{P}(X \geqslant a)$:
    - · Si $a > 0$ on calcule $\dfrac{1}{2} - \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant a)$



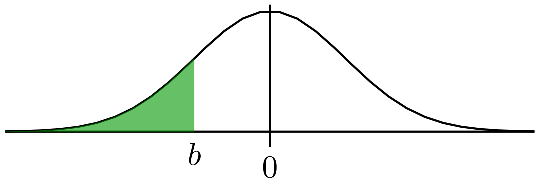
    - · Si $a < 0$, on calcule $\dfrac{1}{2} + \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant 0)$



  - $*$ $\mathbb{P}(X \leqslant b)$:
    - · Si $b > 0$ on calcule $\dfrac{1}{2} + \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant b)$



    - · Si $b < 0$, on calcule $\dfrac{1}{2} - \mathbb{P}(b \leqslant X \leqslant 0)$



- Détermination de valeur (il s'agit de résoudre une équation) :
  - $*$ Chercher a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) = p$:
    On utilise la calculatrice :
    - · Casio : InvNormCD(p)
    - · T.I. : FracNormal(p)
  - $*$ Chercher a tel que $\mathbb{P}(X \geqslant a) = p$:

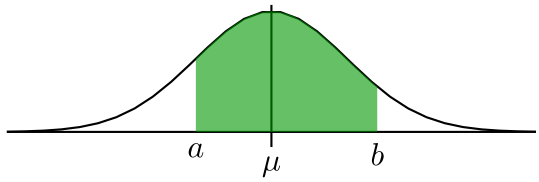
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geqslant a) = p &\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a) = p \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) = 1 - p \end{aligned}$$

  - $*$ Chercher a tel que $\mathbb{P}(-a \leqslant X \leqslant a) = p$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-a \leqslant X \leqslant a) = p &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) - \mathbb{P}(X \leqslant -a) = p \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) - \mathbb{P}(X \geqslant a) = p \quad \text{(par symétrie)} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) - (1 - \mathbb{P}(X \leqslant a)) = p \\ &\Leftrightarrow 2\mathbb{P}(X \leqslant a) - 1 = p \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) = \frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

d. Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Les méthodes sont les mêmes que pour la loi normale centrée réduite, sauf que la courbe est centrée autour de l'espérance (ou moyenne) μ. Le nombre σ est l'écart-type.



Influence des paramètres sur la courbe :

- modifier μ décale la courbe horizontalement ;
- réduire σ « resserre » la courbe autour de la moyenne, ce qui augmente son maximum alors qu'augmenter σ « élargit » la courbe autour de la moyenne et diminue son maximum.

Pour la calculatrice, il faut ajouter les paramètres (dans le bon ordre !) :

en Casio :	NormCD(a,b,σ,μ)	InvNormCD(p,σ,μ)
en T.I. :	NormalFRep(a,b,μ,σ)	FracNormal(p,μ,σ)

⚠ Dans le nom de la loi on utilise le carré de σ : $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
Donc si l'on dit que X suit la loi $\mathcal{N}(150,16)$, alors $\mu = 150$ et $\sigma = \sqrt{16} = 4$.

Méthode
Dans certains cas, il peut être nécessaire de **centrer** (soustraire l'espérance) et **réduire** (diviser par l'écart-type) pour obtenir une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
En effet, on rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exemple Cela peut être nécessaire lorsque σ est inconnu, et que l'on donne une probabilité, pour déterminer σ.
Soit $X \sim \mathcal{N}(120,\sigma^2)$ telle que $\mathbb{P}(X \leqslant 150) = 0{,}75$ On a alors :
$\mathbb{P}\left(\dfrac{X-120}{\sigma} \leqslant \dfrac{30}{\sigma}\right) = 0{,}75$, autrement dit $\mathbb{P}\left(Y \leqslant \dfrac{30}{\sigma}\right) = 0{,}75$ avec $Y = \dfrac{X-120}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
La calculatrice donne $\dfrac{30}{\sigma} \simeq 0{,}6745$, et on obtient alors $\sigma \simeq \dfrac{30}{0{,}6745} \simeq 44{,}48$.

e. Loi exponentielle

La variable, souvent notée T, exprime en général un temps, une durée de vie.
Elle ne prend ses valeurs que sur $[0;+\infty[$.

- Si on nous donne un temps, on va calculer une probabilité, ce qui peut s'interpréter comme une proportion ou un pourcentage.
- Si on nous donne une proportion ou une probabilité, on va chercher un temps et cela revient à résoudre une équation (l'inconnue étant dans l'exponentielle).

Ne pas oublier la propriété de durée de vie sans vieillissement :

$$\mathbb{P}_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \mathbb{P}(T \geqslant h)$$

VII. Statistiques

1. Intervalles de fluctuation

On améliore d'année en année la résolution du problème suivant :

Étant donnée une proportion p d'apparition d'un caractère donné dans une population totale, on souhaite savoir si un échantillon de taille n correspond à cette proportion.
Pour cela on suit la méthode suivante :

Méthode

1. on détermine tout d'abord un intervalle contenant, à un seuil de confiance donné (en général 95%), les fréquences obtenues avec des échantillons de taille n. Cela signifie que dans 95% des échantillons de taille n, la fréquence observée se situe dans cet intervalle.
   Cet intervalle est appelé intervalle de fluctuation au seuil de confiance 95%.
2. On considère ensuite la fréquence f obtenue pour l'échantillon donné, le plus souvent obtenu en effectuant la division :
$$\frac{\text{nombre d'individus ayant le caractère}}{\text{taille } n \text{ de l'échantillon}}$$
3. Finalement on applique la règle de décision suivante, à savoir énoncer :
   - Si f appartient à l'intervalle de fluctuation, alors on accepte l'hypothèse (que p a bien la valeur annoncée, ou que l'échantillon correspond à la population totale) au seuil de confiance 95% ;
   - Sinon, on rejette l'hypothèse.

Quelle que soit la décision prise en suivant la règle, il y a un risque de se tromper.

Ce qui change chaque année, c'est la formule donnant l'intervalle.

a. En seconde

L'intervalle est donné par :
$$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
Les conditions pour l'utiliser sont : $n \geqslant 25$ et $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$.

b. En première

Il s'agit, des trois intervalles donnés au lycée, du plus précis.
On utilise la loi binomiale de paramètres n et p pour l'obtenir. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
On cherche le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant 0{,}025$, puis le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ (voir VI3subsection). Alors, on a $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$, et comme l'intervalle à donner est un intervalle de fluctuation des fréquences, il est donné par :
$$\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$$
Il a le désavantage de nécessiter une calculatrice évoluée et peut être long à obtenir.
Mais il a l'avantage de ne pas avoir de conditions pour l'utiliser : on se ramènera toujours à celui-là en terminale si les conditions ne sont pas remplies.

c. En terminale

On justifie durant cette année l'intervalle vu en seconde, mais on en donne un plus précis, appelé intervalle de fluctuation asymptotique, dans le sens suivant : la probabilité que les fréquences obtenues appartiennent à l'intervalle sont d'autant plus proches de 0,95 que n est grand.
L'intervalle de terminale est donné par :

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Les conditions pour l'utiliser sont les suivantes : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
La formule pour cet intervalle vient du fait que la loi binomiale approche la loi normale à mesure que n augmente.
On peut également changer le seuil de confiance, ce qui a pour conséquence de remplacer le nombre 1,96 par un nombre t_α, qui est solution de

$$\mathbb{P}(-t_\alpha \leqslant X \leqslant t_\alpha) = 1 - \alpha$$

où :

- X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$;
- α est le risque d'erreur, autrement dit $1-\alpha$ est le seuil de confiance.

Ainsi, pour $\alpha = 0{,}05$, $t_\alpha \simeq 1{,}96$ et pour $\alpha = 0{,}01$, $t_\alpha \simeq 2{,}58$.
Pour les autres valeurs de α, on utilise la calculatrice (voir VI5**c**subsubsection).

2. Intervalles de confiance

Il s'agit du problème « inverse » de l'intervalle de flucuation. Ici, **la proportion est inconnue**.
On ne dispose que d'un échantillon de taille n, à partir duquel on observe une fréquence f, et on cherche à estimer p en donnant un intervalle le contenant à un seuil de confiance de 95%.
L'intervalle de confiance au seuil de confiance 95% est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il s'agit du même intervalle, de la seconde à la terminale.
Les conditions pour l'utiliser sont $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$.
Cependant il n'y a pas de solution alternative lorsque les conditions ne sont pas remplies.

VIII. Vecteurs

1. Vocabulaire

a. Définition

Un vecteur est caractérisé par 3 choses :

- son sens (de A vers B)
- sa direction (direction de la droite)
- sa longueur (norme)

En particulier, un vecteur est plus qu'une droite, plus qu'une longueur et il ne faut pas mélanger les vecteurs avec les droites ou avec les longueurs.

L'utilité des vecteurs est entre autres de montrer :

- qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) ;
- que trois points A, B et C sont alignés (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires) ;
- un point appartient à une droite (voir le point précédent) ;
- que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires) ;

b. Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AC}$$

La dernière égalité s'obtient en factorisant par k.

⚠ Attention à la bonne utilisation de la relation :

- il faut le même coefficient devant les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ pour pouvoir réduire leur somme en un seul vecteur ;
- L'ordre des « lettres » (points) est très important.

La relation peut s'utiliser dans les deux sens, ce qui permet de :

- simplifier des égalités ;
- décomposer des vecteurs.

Elle s'utilise souvent quand il s'agit d'exprimer un vecteur en fonction d'un (ou de plusieurs) vecteur(s) imposé(s).

c. Colinéarité

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, ce qui revient à dire que

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour le démontrer :

- Dans le cadre géométrique pur, en utilisant les propriétés géométriques du problème et la relation de Chasles pour exprimer un vecteur en fonction de l'autre ;
- Dans le cadre d'un repère, par simple calcul avec la relation $(xy' - x'y = 0)$, qui revient à vérifier la proportionnalité des coordonnées $\left(\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}\right)$.

Méthode Montrer que deux droites sont parallèles revient à montrer que les vecteurs directeurs sont colinéaires.

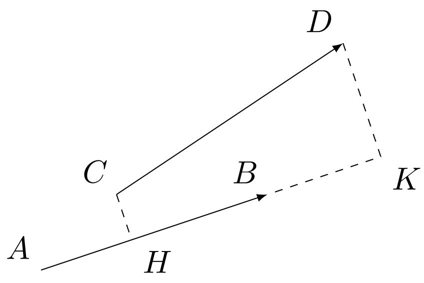
2. Produit scalaire

a. Dans le plan

Calcul

Deux formules géométriques :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$
  À utiliser si l'on connaît les angles.
  S'utilise aussi lorsque l'on connaît le produit scalaire (et les longueurs) pour déterminer l'angle
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$ avec H et K projetés orthogonaux respectivement de C et D sur (AB) :



À utiliser lorsqu'il y a des angles droits.
Une propriété importante du produit scalaire est la suivante :

Propriété $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Par conséquent :

Méthode Lorsque l'utilisation directe de l'une des deux formules précédente échoue, penser à décomposer les vecteurs, généralement à l'aide de vecteurs orthogonaux.

Dans le cas où l'on se situe dans un repère orthonormé, on dispose en plus de la formule analytique :
Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Applications

- Comme vu plus haut, si l'on connaît la valeur d'un produit scalaire et la norme des deux vecteurs, on peut en déduire la mesure de l'angle (non orienté).
- Équation d'une droite (dans le plan) :
  - M appartient à la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ pour vecteur normal si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
  - L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite dont $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal et $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur.
- Équation d'un cercle :
  - M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
  - L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est le cercle de centre $C(a;b)$ et de rayon R.

b. Dans l'espace

Le produit scalaire dans l'espace généralise celui du plan.

Calcul

Méthode Les méthodes sont les mêmes que dans le plan, sachant qu'il faut, pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace, considérer deux représentants respectifs de ces vecteurs situés dans un même plan, puis calculer dans ce plan le produit scalaire de ces représentants.
On utilise alors les mêmes méthodes que dans le plan.

Applications

- Équation d'un plan :
  - M appartient au plan qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ pour vecteur normal si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
  - L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal.

IX. Géométrie dans l'espace

1. Appartenance, inclusion

- Un point appartient à une droite, à un plan.
- Une droite est incluse (ou contenue) dans un plan.
- Un point peut être l'origine (ou l'extrémité) d'un vecteur.
- On dit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$ si il existe deux points A et B appartenant à $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

2. Intersection, parallélisme

- Une droite peut être sécante avec un plan ; l'intersection est alors un point.
- Deux plans peuvent être sécants ; l'intersection est alors une droite.

On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles ; on dit qu'ils sont colinéaires.

Méthode

- Pour démontrer que deux droites sont parallèles, il suffit de démontrer que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de démontrer que deux vecteurs non colinéaires du premier sont égaux à deux vecteurs du second.
- Pour démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de démontrer qu'un vecteur directeur de la droite est égal à un vecteur du plan.

3. Coplanarité

- Des points sont coplanaires s'il existe un plan qui les contient ;
  trois points sont nécessairement coplanaires.
- Deux droites sont coplanaires s'il existe un plan qui les contient ;
  Deux droites peuvent ne pas être coplanaires : quand elles sont ni parallèles, ni sécantes.
  Par contre, deux droites parallèles ou sécantes sont coplanaires.
- Des vecteurs sont coplanaires si, étant donné un point A, les extrémités de leurs représentants d'origine A appartiennent toutes à un même plan contenant le point A ;
  Deux vecteurs sont nécessairement coplanaires.

4. Détermination de droites et de plans

Une droite est déterminée au choix par :

- Deux points A et B ; $\overrightarrow{AB}$ est alors un vecteur directeur ;
- Un point et un vecteur (directeur) ;
  On peut, avec un point et un vecteur directeur, donner une représentation paramétrique de la droite.

Remarque Réciproquement, une représentation paramétrique d'une droite permet d'obtenir les coordonnées d'un point de la droite et d'un vecteur directeur.

Remarque Il existe une infinité de représentations paramétriques d'une droite.

Un plan est déterminé au choix par :

- 3 points non alignés A, B et C ; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ « dirigent » alors le plan ;
- 2 droites sécantes ;
- 2 droites parallèles distinctes ;
- 1 point et 2 vecteurs non colinéaires.
  On peut, avec un point et deux vecteurs non colinéaires, donner une représentation paramétrique du plan.
- 1 point et 1 vecteur normal.

Méthode

- Pour passer d'un système paramétrique d'un plan dépendant de deux paramètres t et t' à une équation du plan, on utilise deux des trois équations du système pour exprimer t et t' en fonction de x, y et z, puis on remplace t et t' par leur expression dans la troisième équation, ce qui donne alors une équation du plan.

- Pour obtenir une équation de plan à partir de trois points A, B et C non alignés on peut au choix :
  - $*$ Considérer le système paramétrique du plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis à partir de là déterminer une équation du plan (voir le point précédent).
  - $*$ Chercher à déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Cela revient à résoudre un système de deux équations (deux produits scalaire nuls) et trois inconnues (les coordonnées de $\vec{n}$). Pour cela on choisit de fixer arbitrairement une valeur non nulle à une des coordonnées, et on résout le système de deux équations à deux équations obtenu.
- Pour passer d'une équation de plan ($ax+by+cz+d=0$) à un système paramétrique, ce qui est rarement demandé, on peut :
  - $*$ Exprimer une des variables x, y ou z qui apparaît dans l'équation en fonction des deux autres, puis remplacer ces deux autres variables par des paramètres (par exemple $x=t$ et $y=t'$, ce qui nous donne deux équations suppémentaires). On obtient alors trois équations avec deux paramètres, autrement dit un système paramétrique de plan.
  - $*$ ou, ce qui est plus long, déterminer les coordonnées de trois points de ce plan, et utiliser le point précédent. Pour ce faire, on fixe arbitrairement deux des coordonnées d'un point et on calcule la troisième à l'aide de l'équation.

5. Repères

Si A, B et C sont trois points non alignés, alors $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ forme un repère du plan (ABC).
Pour définir un repère de l'espace il faut un point O et trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Méthode Quand $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires, tout vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sous la forme $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
En décomposant les coordonnées des vecteurs (abscisses, ordonnées, cote) on obtient un système de trois équations à 3 inconnues.

Remarque Pour démontrer que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires, on résout $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}$, ce qui est un cas particulier de la méthode précédente.
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non-coplanaires si et seulement si $(a; b; c) = (0; 0; 0)$.

X. Nombres complexes

1. Différentes écritures

a. Forme algébrique

Il s'agit de $z = x + iy$.

Méthode Comment obtenir la forme algébrique d'une fraction ?
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple

$$\begin{aligned} Z = \frac{1+i}{2-3i} &= \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\ &= \frac{2+3i+2i-3}{2^2+3^2} \\ &= \frac{-1+5i}{13} \end{aligned}$$

Remarque Il y a trois manières de voir $(x+iy)(x-iy)$, de la plus compliquée à la plus simple :

$$\begin{aligned} (x+iy)(x-iy) &= x^2 - x\times iy + iy \times x - iy \times iy \quad \text{(double distributivité)} \\ &= x^2 - (iy)^2 \quad \text{(identité remarquable)} \\ &= x^2 + y^2 \quad \text{(produit par le conjugué)} \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout nombre complexe $z = x + iy$,

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

On remarque que $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ et même que $x^2 + y^2 \geqslant 0$ (positif).

⚠ Le conjugué de $z + 3 - 2i$ est $\overline{z} + 3 + 2i$: ne pas oublier de prendre le conjugué des nombres lorsqu'ils sont complexes.

b. Forme trigonométrique

Il s'agit de $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
On repère le nombre (ou plutôt son image) dans le plan par la distance à O et l'angle avec le vecteur $\vec{u}$.

Méthode Pour obtenir la forme trigonométrique à partir de la forme algébrique :

- On calcule $|z|$;
- On écrit $z = |z|\left(\dfrac{x}{|z|} + i\dfrac{y}{|z|}\right)$;
- On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$.
  On peut pour cela utiliser un cercle trigonométrique.

Dans l'autre sens, on calcule :

- $x = |z| \times \cos(\arg(z)) = \rho \times \cos\theta$;
- $y = |z| \times \sin(\arg(z)) = \rho \times \sin\theta$.

Le module se comporte bien avec la multiplication, mais pas avec la somme :

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

Avec l'argument on a : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

Rappel Soit $Z = \dfrac{z_d - z_c}{z_b - z_a}$.
Ce nombre est tel que $|Z| = \dfrac{CD}{AB}$ et $\arg(Z) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ (on remonte à l'envers).
Cela permet d'obtenir des propriétés géométriques dans les figures.

c. Forme exponentielle

On pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; alors $z = \rho e^{i\theta}$.

Les calculs avec cette notation exponentielle se font de même qu'avec la fonction exponentielle.
En particulier, si $Z = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}}$, alors $Z = \dfrac{\rho}{\rho'} \times e^{i(\theta-\theta')}$, et donc $|Z| = \dfrac{\rho}{\rho'}$ et $\arg(Z) = \theta - \theta'$.

2. Équations

- Si l'équation ne contient que la variable z, elle se résout généralement de la même manière qu'avec une variable réelle. Sauf que dans le cas $az^2 + bz + c = 0$, il y a toujours des solutions (complexes conjuguées quand $\Delta < 0$).
- Si l'équation ne contient que la variable $\overline{z}$, il en est de même qu'au dessus.
  Il ne faut pas oublier ensuite de donner z, qui est le conjugué de $\overline{z}$.
- Si l'équation contient à la fois z et $\overline{z}$, on remplace z par $x + iy$ (x et y réels) et $\overline{z}$ par $x - iy$.
  On cherche à obtenir une équation de la forme

  $$(E) : A + iB = A' + iB'$$

  où A, B, A', et B' sont des expressions réelles contenant x et y. Autrement dit on cherche à obtenir une égalité entre deux formes algébriques, cela en factorisant le plus possible par i dans les deux membres de l'équation (i n'apparaît alors qu'une fois dans chacun des membres de l'équation). Par suite, grâce à l'unicité de la forme algébrique on identifie les deux parties réelles et les deux parties imaginaires :

  $$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} A = A' \\ B = B' \end{cases}$$

  Qui est un système de deux équations avec deux inconnues x et y.

  ⚠ On n'oublie pas que l'inconnue recherchée est $z = x + iy$.

3. Nombres réels ou imaginaires purs

Il y a deux types de problèmes qui peuvent être posés (peu fréquemment ?) :

a. Vérifier

Pour vérifier qu'un nombre Z est réel (resp. imaginaire pur), il y a plusieurs moyens :
- Montrer que $Im(Z) = 0$ (resp. $Re(Z) = 0$).
  Dans les cas simples on peut chercher tout d'abord à exprimer Z sous forme algébrique.
  Sans oublier que l'on peut utiliser les égalités suivantes :

  $$Re(Z) = \frac{Z + \overline{Z}}{2} \quad \text{et} \quad Im(Z) = \frac{Z - \overline{Z}}{2i}$$

- Montrer que $\overline{Z} = Z$ (resp. $\overline{Z} = -Z$)
- Montrer que $\arg(Z) = 0$ ou π (resp. $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$).
  Dans ce cas là on peut même préciser le signe de la partie réelle (resp. imaginaire).

b. Chercher des conditions

On considère ici un nombre Z défini à partir d'un nombre complexe z.

Méthode Pour déterminer les nombres z tels que Z est un réel pur (resp. imaginaire pur) :

1. On commence par poser $z = x + iy$, puis on détermine la forme algébrique de Z.
2. On indique que Z est un réel pur si et seulement si $Im(Z) = 0$ (resp. $Re(Z) = 0$).
   On obtient alors une équation dépendant de x et y. En TS on ne va en principe tomber que sur deux types d'équations qu'il faut réécrire sous les formes suivantes :

- $ax + by + c = 0$: les points $M(x; y)$ sont situés sur une droite.
- $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$: les points $M(x; y)$ sont situés sur un cercle (de centre C et de rayon R).

XI. Trigonométrie

Pour résoudre un exercice utilisant la trigonométrie, penser à faire un **cercle trigonométrique**.
On rappelle que le cercle trigonométrique a pour rayon 1 et que son périmètre mesure 2π.
Grâce au cercle trigonométrique, il faut savoir :

- placer les angles courants (multiples de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et π),
- retrouver les valeurs des cosinus et sinus des angles courants.

Les mesures en degré et les mesures en radian sont proportionnelles.
Soit d la mesure en degrés d'un angle et x sa mesure en radian, alors $x = d \times \frac{\pi}{180}$.

Rappel Étant donné un intervalle semi-ouvert de longueur 2π, à tout angle correspond un unique réel de l'intervalle. On considère parfois l'intervalle $[0; 2\pi[$. Cependant, la **mesure principale** d'un angle est par définition un nombre de $]-\pi; \pi]$. Les autres mesures d'obtiennent en ajoutant $2k\pi$.

- Pour les équations :
  Si on nous donne le cosinus **et** le sinus d'un angle, alors l'angle est unique (à $2k\pi$) près.
  Cependant, étant donné un réel $c \in]-1; 1[$:
  * L'équation $\cos x = c$ possède **deux solutions** distinctes opposées (α et $-\alpha$) ;
    (dans un intervalle de longueur 2π)
  * L'équation $\sin x = c$ possède **deux solutions** distinctes (α et $\pi - \alpha$).
- Pour les inéquations :
  on peut utiliser deux méthodes de visualisation :
  * Colorier les solutions sur le cercle trigonométrique ;
  * Colorier les solutions sur une représentation graphique de la courbe de la fonction.

Connaître la définition de fonction **paire** ou **impaire**.

XII. Algorithmes

Certains des algorithmes qui ont été vus (et sont à (re)connaître) sont les suivants :

1. Suites

Calcul de termes, de sommes de termes, recherche de rang,...(fiche donnée en ACCPE).

2. Fonctions

Algorithme de dichotomie (exercice 110p62).

3. Équations

de la forme $az^2 + bz + c = 0$, résolution dans $\mathbb{C}$ (exercice 82p214).

4. Intégrales

Obtenir un encadrement d'une intégrale par des aires de rectangles (d'aire inférieure ou d'aire supérieure), dans le cas d'une fonction monotone (page 166).