

Méthodes utiles en 1^{re}



Cette fiche n'est pas un cours minimal, ni une recette miracle. Cependant connaître son contenu est important, car il permet de guider le raisonnement. Si, en lisant son contenu, certains points ne vous paraissent pas clairs, c'est qu'il faut revoir ces points, en relisant le cours ou en refaisant des exercices, pour bien les comprendre.

Avant tout, la première des méthodes est de connaître le cours et les formules !

Table des matières

I	Étude de signe	3
	1 Utilité	3
	2 Méthodes	3
II	Résolution	4
	1 Équations	4
	a Différents types	4
	b Méthodes	4
	2 Inéquations	4
III	Suites	5
	1 Généralités	5
	2 Deux types de suites étudiées	5
	a Suites arithmétiques	5
	b Suites géométriques	6
	3 Variations	6
	4 Utilisation du signe somme $\sum$	7
IV	Fonctions	7
	1 Dérivation	7
	2 Représentation graphique	8
	a Méthodes	8
	b Tangentes	8
	3 Variations	8
	a Fonctions de référence	8
	b Fonctions quelconques	9
	c Extrema	9
V	Probabilités	9
	1 Généralités	9
	2 Premières formules	9
	3 Loi binomiale	9
VI	Statistiques	10
	1 Intervalles de fluctuation	10
	a En seconde	11
	b En première	11
	2 Intervalles de confiance	11
VII	Vecteurs	11
	1 Vocabulaire	11
	a Définition	11
	b Relation de Chasles	12
	c Colinéarité	12

2	Produit scalaire	12
a	Dans le plan	12
VIII	Géométrie dans l'espace.	13
1	Appartenance, inclusion.....	13
2	Intersection, parallélisme.....	13
3	Coplanarité	13
4	Détermination de droites et de plans.....	14
IX	Trigonométrie	14
X	Algorithmes.....	14
1	Suites	14
2	Fonctions.....	14
3	Équations	14

I. Étude de signe

1. Utilité

- Connaître le signe d'une fonction f , c'est pouvoir déterminer si un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse donnée x est au dessus ou au dessous de l'axe des abscisses, autrement dit respectivement si $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$.
- Plus généralement, pour étudier la position relative des deux courbes représentatives des fonctions f et g , on se ramène à l'étude d'un signe. En effet : $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ si et seulement si $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0$ ($f - g$ est positif).
- Étudier le signe d'une dérivée f' permet de connaître les variations de la fonction f (voir [IV3](#)subsection).

2. Méthodes

Les expressions dont on sait déterminer le signe :

- celles de la forme $ax + b$: on résout par exemple $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b$ (I) ;

 Lorsque l'on divise par a , le signe de a peut faire changer le sens de l'inégalité :

- * Si $a > 0$, alors (I) $\Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$;
- * Si $a < 0$, alors (I) $\Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$.

On peut aussi indiquer les variations de la fonction associée (croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$), puis résoudre simplement l'équation : $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Pour résumer :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	$-$	0	$+$

cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	$+$	0	$-$

cas où $a < 0$

- celles de la forme $ax^2 + bx + c$ (grâce aux racines et au signe de a) ;

Remarque Pour obtenir les racines, le calcul du discriminant Δ n'est pas toujours obligatoire, en particulier quand il n'y a que deux termes. Voir [III1](#)subsection pour plus de détails.

L'expression est **généralement** du signe de a (sauf entre les éventuelles racines).

- Un carré est toujours positif : $(\dots)^2 \geq 0$;
- Une racine carrée est toujours positive : $\sqrt{\dots} \geq 0$;
(ne pas confondre avec le fait que ce qui est dans la racine carrée **doit** être positif pour que la racine carrée existe)
- Le signe d'un produit ou d'un quotient d'expressions précédentes s'étudie grâce à un tableau de signes, après avoir étudié le signe de chacun des facteurs.

 Un nombre inconnu écrit sous la forme $-A$ peut tout à fait être positif (lorsque $A < 0$).

 Il est très difficile d'obtenir le signe d'une somme (ou d'une soustraction) en général.

En particulier, sans précision on ne connaît pas le signe de la **somme** de deux termes de signes opposés. On sait seulement que la somme de deux expressions positives (resp. négatives) est positive (resp. négative). C'est pour cela qu'en général on cherche plutôt à factoriser les expressions dont on cherche à connaître le signe.

 Ne jamais faire de tableau de signe pour une somme, les règles ne sont pas les mêmes que pour le produit !

En dernière extrémité, on essaie de résoudre une inéquation. Autrement dit si l'on cherche le signe d'une expression $A(x)$, on résout $A(x) > 0$. Voir [II2](#) subsection pour les méthodes.

II. Résolution

1. Équations

a. Différents types

Les types d'équations que l'on peut résoudre :

- Du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$. Les solutions sont appelées racines.

Remarque Généralement on calcule le discriminant Δ pour obtenir les racines, mais on peut éviter si $b = 0$ ou $c = 0$.

* $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$ qui se résout simplement (produit nul) ;

* $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ se résout (sans oublier de solution !) rapidement.

- Du premier degré : $ax + b = cx + d$.

On fait en sorte de regrouper les inconnues d'un côté, les constantes de l'autre. Pour cela, voir les méthodes générales plus bas ([II1b](#) subsection).

- Les équations qui s'écrivent sous la forme d'un produit nul $A \times B = 0$. On utilise le fait qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul. On se retrouve alors à devoir résoudre deux (ou plus) équations.

b. Méthodes

On raisonne par équivalence en appliquant des opérations sur **les deux membres** de l'équation.

- Les opérations de calcul sont les suivantes :
 - * Ajouter (ou soustraire) une expression ;
 - * Multiplier (ou diviser) par un nombre **non nul** (en particulier, en principe pas par l'inconnue).
- On peut aussi appliquer la fonction inverse si les membres de l'équation se sont pas nuls ;

 Pas d'opération *locale* : on applique l'opération à **toute** l'expression. Pour passer de $5x + 3$ à x , on doit donc d'abord soustraire 3 puis diviser par 5 et pas le contraire, car commencer par diviser par 5 entraîne de diviser aussi 3 par 5 : $x + \frac{3}{5}$.

2. Inéquations

Ne pas oublier que dans certains cas, résoudre une inéquation, c'est seulement déterminer un signe, puisque par exemple résoudre $A > 0$ c'est chercher quand A est positif (voir [I](#) section).

De même que pour les équations, on peut faire des opérations sur les deux membres d'une inéquation, en conservant l'équivalence.

- Les opérations de calcul sont les suivantes :
 - * Ajouter (ou soustraire) une expression : aucune influence sur le sens de l'inégalité ;
 - * Multiplier (ou diviser) par un nombre **non nul** (en particulier, en principe pas par l'inconnue). Le sens de l'inégalité change si (et seulement si) le nombre est négatif ;
- On peut également appliquer une fonction monotone. Si l'on utilise une fonction :
 - * croissante, on conserve le sens de l'inégalité ;
 - * décroissante, on change le sens de l'inégalité.

Remarque En fait, on peut voir les opérations comme l'application d'une fonction :

- Ajouter une constante c revient à appliquer la fonction affine $x \mapsto x + c$ croissante ;
- Multiplier par une constante $a \neq 0$ revient à appliquer la fonction affine $x \mapsto ax$, dont les variations dépendent du signe de a .



⚠ Appliquer une fonction monotone fait perdre *a priori* l'équivalence.

En effet, la définition est : « **si** $x \leq y$ et f est croissante, **alors** $f(x) \leq f(y)$ ». Ce n'est donc qu'une implication, pas une équivalence. Pour avoir l'équivalence, il faut pouvoir également appliquer une fonction monotone dans l'autre sens.

Exemple Si $x \geq 1$, alors $x^2 \geq 1$ car la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Mais la réciproque est fautive. On a en effet :

$$x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \quad (\text{la fonction racine carrée est croissante sur } [0; +\infty[)$$

La racine carrée de x^2 n'est pas x mais $|x|$ (valeur absolue de x).

Par suite, $|x| \geq 1$ revient à « $x \geq 1$ **ou** $x \leq -1$ ».

L'équivalence est donc :

$$x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1$$

Cependant, si l'on résout dans $[0; +\infty[$ (autrement dit si on sait que x est positif), la première implication est alors une équivalence.

III. Suites

1. Généralités

Deux manières de définir une suite :

- De manière explicite (u_n en fonction de n) ;
- Par récurrence (u_{n+1} en fonction de u_n).

2. Deux types de suites étudiées

a. Suites arithmétiques

Deux définitions :

- Explicite : $u_n = u_0 + r \times n$ ou $u_n = u_p + r \times (n - p)$ ($n \geq p$)
On peut remarquer que cette expression est une expression affine (de la variable n).
- Par récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$.

r , constante, est la raison de la suite.

Méthode Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

- Si elle est définie de l'une des deux formes données plus haut, cela suffit à l'affirmer
- Sinon, on exprime $u_{n+1} - u_n$ et on démontre que cette expression est constante.

 Montrer que $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ ne suffit pas : il faut faire une preuve générale (n quelconque).

Méthode Comment démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique ?

On calcule des différences de termes successifs de la suite et on en donne deux distinctes.

Par exemple, $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_0$.

Les variations des suites arithmétiques dépendent de la raison r :

- Si $r > 0$, la suite est croissante ;
- Si $r < 0$, la suite est décroissante.

Il existe une formule dans le cours pour ajouter les termes d'une suite arithmétique.

b. Suites géométriques

Deux définitions :

- Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ($n \geq p$)
- Par récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$.

q , constante, est la raison de la suite.

Méthode Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

- Si elle est définie de l'une des deux formes données plus haut, cela suffit à l'affirmer
- Sinon, on exprime $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on démontre que cette expression est constante.

Il peut suffire d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis de simplifier, à moins que l'on passe par une autre suite

 Montrer que $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$ ne suffit : il faut faire une preuve générale (n quelconque).

Méthode Comment démontrer qu'une suite n'est pas géométrique ?

On calcule des quotients de termes successifs de la suite et on en donne deux différents.

Par exemple, $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ (mais il faut parfois aller plus loin).

Il existe une formule dans le cours (de première) pour ajouter les termes d'une suite géométrique.

Les variations sont connues pour les suites **positives**, sachant que la suite est positive si $q > 0$ et si le premier terme u_0 est positif.

Elles dépendent de la raison q :

- Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante ;
- Si $q > 1$, la suite est croissante.

3. Variations

De manière générale, les variations de u sont données par le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Plus précisément,

- si quelque soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0$, alors u est croissante.
- si quelque soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$, alors u est décroissante.

Le plus souvent on commence par remplacer u_{n+1} par sa définition (donnée en général par récurrence). Voir [Isection](#) pour l'étude d'un signe.

Remarque Ne pas oublier que dans le cas des suites, on a forcément $n \geq 0$, puisque $n \in \mathbb{N}$.



Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante : elle est alors non monotone.



Le calcul des 3 (voire des 1 000) premiers termes ne suffit pas à conclure (sauf pour dire que la suite n'est pas monotone).



On ne connaît *a priori* pas le signe de u_n en général. Cependant :

Remarque Si est positive, alors on peut utiliser le critère (plutôt rare) suivant :

u est croissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

En effet, si $u_n > 0$, l'inégalité est équivalente à $u_{n+1} > u_n$, soit à $u_{n+1} - u_n > 0$.

Méthode On peut utiliser la propriété suivante :

Propriété Si $u_n = f(n)$ et si f est monotone, alors u l'est aussi et a les mêmes variations que f .

Il s'agit alors d'étudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x)$, éventuellement en commençant par la dériver (voir [IV3subsection](#)).



Si f n'est pas monotone, on ne peut pas conclure immédiatement que u ne l'est pas.



Si la suite est définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on **ne peut pas conclure** sur les variations de u en étudiant celles de f . Il existe un critère, mais il est dangereux et hors programme.

4. Utilisation du signe somme $\sum$

Penser que :

- $\sum_{i=1}^{n+1} E(i) = \left(\sum_{i=1}^n E(i) \right) + E(n+1)$ et $\sum_{i=1}^n E(i) = E(1) + \left(\sum_{i=2}^n E(i) \right)$;
- $\sum_{i=0}^n E(i+1) = \sum_{j=1}^{n+1} E(j)$ (changement de variable $j = i+1$) ;
- $\sum_{i=0}^n E(i) = \sum_{j=0}^n E(j)$ (le nom de la variable n'a pas d'importance) ;
- $\sum_{i=0}^n (E(i) + F(i)) = \left(\sum_{i=0}^n E(i) \right) + \left(\sum_{i=0}^n F(i) \right)$.

IV. Fonctions

1. Dérivation

Pour déterminer la dérivée de f , la première question à se poser est : « de quelle forme est f » ?

- S'il s'agit d'une somme de fonctions dérivables directement, comme les fonctions polynomiales, alors on dérive directement ;
- S'il s'agit d'une somme de fonctions composées, on identifie chaque fonction composée que l'on dérive séparément, puis l'on ajoute les dérivées ;
- S'il s'agit d'un produit, on identifie les fonction u et v et on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$;
- S'il s'agit d'un quotient, on identifie les fonctions u et v et on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

Remarque Laisser v^2 sous forme de carré, puisque l'on sait que c'est alors positif, ce qui est une information importante sur la dérivée.

Remarque Éviter d'utiliser la forme $\frac{u}{v}$ si u ou v est constante :

- Si u est une constante k , alors on a $k \times \frac{1}{v}$, qui a pour dérivée $k \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right)$;
- Si v est une constante k , alors on a $\frac{1}{k}u$, qui a pour dérivée $\frac{1}{k}u' = \frac{u'}{k}$.

Remarque Les fonctions u et v peuvent elles aussi être composées et donc nécessiter encore l'utilisation d'une formule de dérivation. Faire alors attention à utiliser d'autres noms de fonctions comme (par ordre de préférence) $w, f, g, h, k, l, \dots$ éventuellement avec des indices comme $w_1, w_2, \dots$

2. Représentation graphique

a. Méthodes

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction, on peut faire une ou plusieurs des choses suivantes :

- Faire un tableau de valeurs (on peut s'aider de la calculatrice) ;
- Étudier les variations de la fonction (voir [IV3subsection](#)) ;
- Utiliser les tangentes pour s'aider (voir [IV2bsubsubsection](#)).

b. Tangentes

L'équation de tangente est à connaître : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Ne pas oublier le « $y =$ » : Le mot « **équation** » contient le mot **égalité** !

Une tangente peut aider à tracer la courbe représentative de la fonction, localement au point de tangence.

3. Variations

a. Fonctions de référence

On connaît, ou l'on sait déterminer, les variations des fonctions suivantes :

- La fonction carrée $x \mapsto x^2$;
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$;
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$;

- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$
(qui dépendent du signe de a) ;
- Les fonctions polynomiales de degré 2 $x \mapsto ax^2 + bx + c$
(elles dépendent du signe de a et de l'abscisse du sommet : $\frac{-b}{2a}$) ;

b. Fonctions quelconques

Pour déterminer les variations d'une fonction f , on peut commencer par calculer la dérivée f' de f (voir [IV1subsection](#)), puis étudier le signe de la dérivée f' (voir [Isection](#)).

En effet :

- Si quelque soit $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;
- Si quelque soit $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

c. Extrema

Pour déterminer les extrema d'une fonction f , on étudie les variations de f .

La lecture du tableau de variations permet alors généralement de déterminer le maximum et le minimum (s'ils existent).

V. Probabilités

1. Généralités

Penser, même si cela n'est pas demandé, à traduire les énoncés sous forme de probabilités.

Se rappeler que le mot clé « **au hasard** » traduit la présence d'une loi équirépartie, ce qui permet, essentiellement, de justifier l'utilisation de fractions et de compter des individus pour déterminer des probabilités.



Le fait que la loi soit équirépartie n'implique pas que la probabilité de n'importe quel événement est toujours la même !

2. Premières formules

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$



En général, $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Ce n'est le cas que si A et B sont **indépendants**.

3. Loi binomiale

La loi binomiale est une loi de probabilité qui dépend de deux paramètres, n et p .

Méthode Il faut savoir justifier qu'une variable suit une loi binomiale. Pour cela :

1. Mettre en évidence l'épreuve de Bernoulli (le choix d'**une** personne, le tirage d'**un** objet), en précisant :
 - la description de l'**événement succès** ;
 - la valeur de la probabilité de succès.

- On indique que l'on répète un nombre de fois l'expérience **de manière indépendante**.
Si l'indépendance n'apparaît pas clairement dans l'énoncé, on peut la justifier :
 - lorsqu'il s'agit de choix (ou tirages) **au hasard et avec remise**.
 - Si l'échantillon a été prélevé en une seule fois, c'est en principe parce que l'on considère que **la taille de la population totale est suffisamment grande** pour assimiler le choix (ou tirage) à un choix (ou tirage) au hasard et avec remise.
 L'expérience consiste alors en un schéma de Bernoulli.
- On précise enfin que l'on s'intéresse **au nombre de succès X** (le nom de la variable aléatoire), et donc que X suit la loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n, p)$.

La calculatrice permet d'obtenir deux calculs de probabilités particuliers :

- $\mathbb{P}(X = k)$ En TI : `binomFdp(n,p,k)`
En Casio : `BinominalPD(k,n,p)`
- $\mathbb{P}(X \leq k)$ En TI : `binomFRép(n,p,k)`
En Casio : `BinominalCD(k,n,p)`

Avec les modèles récents de Casio, on peut en plus résoudre l'inéquation :

$\mathbb{P}(X \leq a) = k$ d'inconnue a : `InvBinomCD(k,n,p)`.

Pour faire la même chose avec les autres calculatrices, on peut définir une fonction :

$Y1 = \text{BinominalCD}(X, n, p)$ (pour Casio) ou $Y1 = \text{BinomFRép}(n, p, X)$ (pour TI),

puis regarder le tableau de valeurs de celle-ci pour trouver a (on cherche la plus petite valeur de X qui a une image supérieure ou égale à k).

Cela est utile en particulier pour déterminer des intervalles de fluctuation (voir [VI1subsection](#)).

VI. Statistiques

1. Intervalles de fluctuation

On améliore d'année en année la résolution du problème suivant :

Étant donnée une proportion p d'apparition d'un caractère donné dans une population totale, on souhaite savoir si un échantillon de taille n correspond à cette proportion.

Pour cela on suit la méthode suivante :

Méthode

- on détermine tout d'abord un intervalle contenant, à un seuil de confiance donné (en général 95%), les fréquences obtenues avec des échantillons de taille n . Cela signifie que dans 95% des échantillons de taille n , la fréquence observée se situe dans cet intervalle.
Cet intervalle est appelé intervalle de fluctuation au seuil de confiance 95%.
- On considère ensuite la fréquence f obtenue pour l'échantillon donné, le plus souvent obtenu en effectuant la division :

$$\frac{\text{nombre d'individus ayant le caractère}}{\text{taille } n \text{ de l'échantillon}}$$

- Finally on applique la règle de décision suivante, à savoir énoncer :
 - Si f appartient à l'intervalle de fluctuation, alors on accepte l'hypothèse (que p a bien la valeur annoncée, ou que l'échantillon correspond à la population totale) au seuil de confiance 95% ;
 - Sinon, on rejette l'hypothèse.

 Quelle que soit la décision prise en suivant la règle, il y a un risque de se tromper.

Ce qui change chaque année, c'est la formule donnant l'intervalle.

a. En seconde

L'intervalle est donné par :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Les conditions pour l'utiliser sont : $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$.

b. En première

Il s'agit, des trois intervalles donnés au lycée, du plus précis.

On utilise la loi binomiale de paramètres n et p pour l'obtenir. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

On cherche le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) \geq 0,025$, puis le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 0,975$ (voir V3subsection). Alors, on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) \geq 0,95$, et comme l'intervalle à donner est un intervalle de fluctuation des fréquences, il est donné par :

$$\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$$

Il a le désavantage de nécessiter une calculatrice évoluée et peut être long à obtenir.

Mais il a l'avantage de ne pas avoir de conditions pour l'utiliser : on se ramènera toujours à celui-là en terminale si les conditions ne sont pas remplies.

2. Intervalles de confiance

Il s'agit du problème « inverse » de l'intervalle de fluctuation. Ici, **la proportion est inconnue**.

On ne dispose que d'un échantillon de taille n , à partir duquel on observe une fréquence f , et on cherche à estimer p en donnant un intervalle le contenant à un seuil de confiance de 95%.

L'intervalle de confiance au seuil de confiance 95% est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Il s'agit du même intervalle, de la seconde à la terminale.

VII. Vecteurs

1. Vocabulaire

a. Définition

Un vecteur est caractérisé par 3 choses :

- son sens (de A vers B)
- sa direction (direction de la droite)
- sa longueur (norme)

En particulier, un vecteur est plus qu'une droite, plus qu'une longueur et il ne faut pas mélanger les vecteurs avec les droites ou avec les longueurs.

L'utilité des vecteurs est entre autres de montrer :

- qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) ;
- que trois points A, B et C sont alignés (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires) ;
- un point appartient à une droite (voir le point précédent) ;
- que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires) ;

b. Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AC}$$

La dernière égalité s'obtient en factorisant par k .



Attention à la bonne utilisation de la relation :

- il faut le même coefficient devant les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ pour pouvoir réduire leur somme en un seul vecteur ;
- L'ordre des « lettres » (points) est très important.

La relation peut s'utiliser dans les deux sens, ce qui permet de :

- simplifier des égalités ;
- décomposer des vecteurs.

Elle s'utilise souvent quand il s'agit d'exprimer un vecteur en fonction d'un (ou de plusieurs) vecteur(s) imposé(s).

c. Colinéarité

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, ce qui revient à dire que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour le démontrer :

- Dans le cadre géométrique pur, en utilisant les propriétés géométriques du problème et la relation de Chasles pour exprimer un vecteur en fonction de l'autre ;
- Dans le cadre d'un repère, par simple calcul avec la relation $(xy' - x'y = 0)$, qui revient à vérifier la proportionnalité des coordonnées $\left(\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}\right)$.

Méthode Montrer que deux droites sont parallèles revient à montrer que les vecteurs directeurs sont colinéaires.

2. Produit scalaire

a. Dans le plan

Calcul

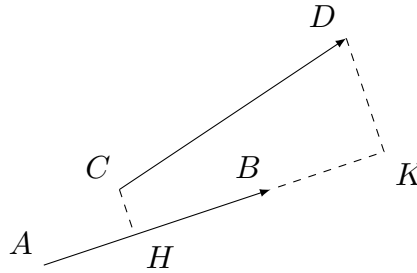
Deux formules géométriques :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$

À utiliser si l'on connaît les angles.

S'utilise aussi lorsque l'on connaît le produit scalaire (et les longueurs) pour déterminer l'angle

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$ avec H et K projetés orthogonaux respectivement de C et D sur (AB) :



À utiliser lorsqu'il y a des angles droits.

Une propriété importante du produit scalaire est la suivante :

Propriété $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Par conséquent :

Méthode Lorsque l'utilisation directe de l'une des deux formules précédente échoue, penser à décomposer les vecteurs, généralement à l'aide de vecteurs orthogonaux.

Dans le cas où l'on se situe dans un repère orthonormé, on dispose en plus de la formule analytique : Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Applications

- Comme vu plus haut, si l'on connaît la valeur d'un produit scalaire et la norme des deux vecteurs, on peut en déduire la mesure de l'angle (non orienté).
- Équation d'une droite (dans le plan) :
 - * M appartient à la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ pour vecteur normal si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
 - * L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite dont $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal et $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur.
- Équation d'un cercle :
 - * M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
 - * L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ est le cercle de centre $C(a; b)$ et de rayon R .

VIII. Géométrie dans l'espace

1. Appartenance, inclusion

- Un point appartient à une droite, à un plan.
- Une droite est incluse (ou contenue) dans un plan.
- Un point peut être l'origine (ou l'extrémité) d'un vecteur.

2. Intersection, parallélisme

- Une droite peut être sécante avec un plan ; l'intersection est alors un point.
- Deux plans peuvent être sécants ; l'intersection est alors une droite.



On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles ; on dit qu'ils sont colinéaires.

3. Coplanarité

- Des points sont coplanaires s'il existe un plan qui les contient ;
trois points sont nécessairement coplanaires.

4. Détermination de droites et de plans

Une droite est déterminée au choix par :

- Deux points A et B ; $\overrightarrow{AB}$ est alors un vecteur directeur ;
- Un point et un vecteur (directeur) ;

Un plan est déterminé au choix par :

- 3 points non alignés A , B et C ;
- 2 droites sécantes ;
- 2 droites parallèles distinctes ;

IX. Trigonométrie

Pour résoudre un exercice utilisant la trigonométrie, penser à faire un **cercle trigonométrique**.
On rappelle que le cercle trigonométrique a pour rayon 1 et que son périmètre mesure 2π .

Grâce au cercle trigonométrique, il faut savoir :

- placer les angles courants (multiples de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et π),
- retrouver les valeurs des cosinus et sinus des angles courants.

Les mesures en degré et les mesures en radian sont proportionnelles.

Soit d la mesure en degrés d'un angle et x sa mesure en radian, alors $x = d \times \frac{\pi}{180}$.

Rappel Étant donné un intervalle semi-ouvert de longueur 2π , à tout angle correspond un unique réel de l'intervalle. On considère parfois l'intervalle $[0; 2\pi[$. Cependant, la **mesure principale** d'un angle est par définition un nombre de $] -\pi; \pi]$. Les autres mesures d'obtiennent en ajoutant $2k\pi$.

- Pour les équations :
Si on nous donne le cosinus **et** le sinus d'un angle, alors l'angle est unique (à $2k\pi$) près.
Cependant, étant donné un réel $c \in] -1; 1[$:
* L'équation $\cos x = c$ possède **deux solutions** distinctes opposées (α et $-\alpha$) ;
(dans un intervalle de longueur 2π)
* L'équation $\sin x = c$ possède **deux solutions** distinctes (α et $\pi - \alpha$).

X. Algorithmes

Certains des algorithmes qui ont été vus (et sont à (re)connaître) sont les suivants :

1. Suites

Calcul de termes, de sommes de termes, recherche de rang,...

2. Fonctions

Algorithme de dichotomie.

3. Équations

de la forme $az^2 + bz + c = 0$, résolution dans $\mathbb{C}$.