

Méthodes utiles en 2^{de}



Cette fiche n'est pas un cours minimal, ni une recette miracle. Cependant connaître son contenu est important, car il permet de guider le raisonnement. Si, en lisant son contenu, certains points ne vous paraissent pas clairs, c'est qu'il faut revoir ces points, en relisant le cours ou en refaisant des exercices, pour bien les comprendre.

Avant tout, la première des méthodes est de connaître le cours et les formules !

Table des matières

I	Étude de signe	2
	1 Utilité	2
	2 Méthodes	2
II	Résolution	3
	1 Équations	3
	a Différents types	3
	b Méthodes	3
	2 Inéquations	3
III	Fonctions	4
	1 Représentation graphique	4
	a Méthodes	4
	2 Variations	4
	a Fonctions de référence	4
	b Extrema	4
IV	Probabilités	4
	1 Généralités	4
	2 Premières formules	4
V	Statistiques	5
	1 Intervalles de fluctuation	5
	a En seconde	5
	2 Intervalles de confiance	5
VI	Vecteurs	6
	1 Vocabulaire	6
	a Définition	6
	b Relation de Chasles	6
	c Colinéarité	7
VII	Géométrie dans l'espace	7
	1 Appartenance, inclusion	7
	2 Intersection, parallélisme	7
	3 Coplanarité	7
	4 Détermination de droites et de plans	7
VIII	Trigonométrie	7
IX	Algorithmes	8
	1 Fonctions	8
	2 Équations	8

I. Étude de signe

1. Utilité

- Connaître le signe d'une fonction f , c'est pouvoir déterminer si un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse donnée x est au dessus ou au dessous de l'axe des abscisses, autrement dit respectivement si $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$.
- Plus généralement, pour étudier la position relative des deux courbes représentatives des fonctions f et g , on se ramène à l'étude d'un signe. En effet :
 $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ si et seulement si $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0$ ($f - g$ est positif).

2. Méthodes

Les expressions dont on sait déterminer le signe :

- celles de la forme $ax + b$: on résout par exemple $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b$ (I) ;

 Lorsque l'on divise par a , le signe de a peut faire changer le sens de l'inégalité :

* Si $a > 0$, alors $(I) \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$;

* Si $a < 0$, alors $(I) \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$.

On peut aussi indiquer les variations de la fonction associée (croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$), puis résoudre simplement l'équation : $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Pour résumer :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	$-$	0	$+$

cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	$+$	0	$-$

cas où $a < 0$

- Un carré est toujours positif : $(\dots)^2 \geq 0$;
- Une racine carrée est toujours positive : $\sqrt{\dots} \geq 0$;
 (ne pas confondre avec le fait que ce qui est dans la racine carrée **doit** être positif pour que la racine carrée existe)
- Le signe d'un produit ou d'un quotient d'expressions précédentes s'étudie grâce à un tableau de signes, après avoir étudié le signe de chacun des facteurs.

 Un nombre inconnu écrit sous la forme $-A$ peut tout à fait être positif (lorsque $A < 0$).

 Il est très difficile d'obtenir le signe d'une somme (ou d'une soustraction) en général. En particulier, sans précision on ne connaît pas le signe de la **somme** de deux termes de signes opposés. On sait seulement que la somme de deux expressions positives (resp. négatives) est positive (resp. négative). C'est pour cela qu'en général on cherche plutôt à factoriser les expressions dont on cherche à connaître le signe.

 Ne jamais faire de tableau de signe pour une somme, les règles ne sont pas les mêmes que pour le produit !

En dernière extrémité, on essaie de résoudre une inéquation. Autrement dit si l'on cherche le signe d'une expression $A(x)$, on résout $A(x) > 0$. Voir [II2subsection](#) pour les méthodes.

II. Résolution

1. Équations

a. Différents types

Les types d'équations que l'on peut résoudre :

- Du premier degré : $ax + b = cx + d$.
On fait en sorte de regrouper les inconnues d'un côté, les constantes de l'autre. Pour cela, voir les méthodes générales plus bas ([II1bsubsection](#)).
- Les équations qui s'écrivent sous la forme d'un produit nul $A \times B = 0$. On utilise le fait qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul. On se retrouve alors à devoir résoudre deux (ou plus) équations.

b. Méthodes

On raisonne par équivalence en appliquant des opérations sur **les deux membres** de l'équation.

- Les opérations de calcul sont les suivantes :
 - * Ajouter (ou soustraire) une expression ;
 - * Multiplier (ou diviser) par un nombre **non nul** (en particulier, en principe pas par l'inconnue).
- On peut aussi appliquer la fonction inverse si les membres de l'équation se sont pas nuls ;

 Pas d'opération *locale* : on applique l'opération à **toute** l'expression. Pour passer de $5x + 3$ à x , on doit donc d'abord soustraire 3 puis diviser par 5 et pas le contraire, car commencer par diviser par 5 entraîne de diviser aussi 3 par 5 : $x + \frac{3}{5}$.

2. Inéquations

Ne pas oublier que dans certains cas, résoudre une inéquation, c'est seulement déterminer un signe, puisque par exemple résoudre $A > 0$ c'est chercher quand A est positif (voir [Isection](#)).

De même que pour les équations, on peut faire des opérations sur les deux membres d'une inéquation, en conservant l'équivalence.

- Les opérations de calcul sont les suivantes :
 - * Ajouter (ou soustraire) une expression : aucune influence sur le sens de l'inégalité ;
 - * Multiplier (ou diviser) par un nombre **non nul** (en particulier, en principe pas par l'inconnue). Le sens de l'inégalité change si (et seulement si) le nombre est négatif ;
- On peut également appliquer une fonction monotone. Si l'on utilise une fonction :
 - * croissante, on conserve le sens de l'inégalité ;
 - * décroissante, on change le sens de l'inégalité.

Remarque En fait, on peut voir les opérations comme l'application d'une fonction :

- Ajouter une constante c revient à appliquer la fonction affine $x \mapsto x + c$ croissante ;
- Multiplier par une constante $a \neq 0$ revient à appliquer la fonction affine $x \mapsto ax$, dont les variations dépendent du signe de a .

III. Fonctions

1. Représentation graphique

a. Méthodes

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction, on peut faire une ou plusieurs des choses suivantes :

- Faire un tableau de valeurs (on peut s'aider de la calculatrice) ;
- Étudier les variations de la fonction (voir [III2subsection](#)) ;

2. Variations

a. Fonctions de référence

On connaît, ou l'on sait déterminer, les variations des fonctions suivantes :

- La fonction carrée $x \mapsto x^2$;
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$
(qui dépendent du signe de a) ;
- Les fonctions polynomiales de degré 2 $x \mapsto ax^2 + bx + c$
(elles dépendent du signe de a et de l'abscisse du sommet : $\frac{-b}{2a}$) ;

b. Extrema

Pour déterminer les extrema d'une fonction f , on étudie les variations de f .

La lecture du tableau de variations permet alors généralement de déterminer le maximum et le minimum (s'ils existent).

IV. Probabilités

1. Généralités

Penser, même si cela n'est pas demandé, à traduire les énoncés sous forme de probabilités.

Se rappeler que le mot clé « **au hasard** » traduit la présence d'une loi équirépartie, ce qui permet, essentiellement, de justifier l'utilisation de fractions et de compter des individus pour déterminer des probabilités.

 Le fait que la loi soit équirépartie n'implique pas que la probabilité de n'importe quel événement est toujours la même !

2. Premières formules

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$

 En général, $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Ce n'est le cas que si A et B sont **indépendants**.

V. Statistiques

1. Intervalles de fluctuation

On améliore d'année en année la résolution du problème suivant :
Étant donnée une proportion p d'apparition d'un caractère donné dans une population totale, on souhaite savoir si un échantillon de taille n correspond à cette proportion.
Pour cela on suit la méthode suivante :

Méthode

1. on détermine tout d'abord un intervalle contenant, à un seuil de confiance donné (en général 95%), les fréquences obtenues avec des échantillons de taille n . Cela signifie que dans 95% des échantillons de taille n , la fréquence observée se situe dans cet intervalle.
Cet intervalle est appelé intervalle de fluctuation au seuil de confiance 95%.
2. On considère ensuite la fréquence f obtenue pour l'échantillon donné, le plus souvent obtenu en effectuant la division :

$$\frac{\text{nombre d'individus ayant le caractère}}{\text{taille } n \text{ de l'échantillon}}$$

3. Finalement on applique la règle de décision suivante, à savoir énoncer :
 - Si f appartient à l'intervalle de fluctuation, alors on accepte l'hypothèse (que p a bien la valeur annoncée, ou que l'échantillon correspond à la population totale) au seuil de confiance 95% ;
 - Sinon, on rejette l'hypothèse.

 Quelle que soit la décision prise en suivant la règle, il y a un risque de se tromper.

Ce qui change chaque année, c'est la formule donnant l'intervalle.

a. En seconde

L'intervalle est donné par :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Les conditions pour l'utiliser sont : $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$.

2. Intervalles de confiance

Il s'agit du problème « inverse » de l'intervalle de fluctuation. Ici, **la proportion est inconnue**.

On ne dispose que d'un échantillon de taille n , à partir duquel on observe une fréquence f , et on cherche à estimer p en donnant un intervalle le contenant à un seuil de confiance de 95%.

L'intervalle de confiance au seuil de confiance 95% est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Il s'agit du même intervalle, de la seconde à la terminale.

VI. Vecteurs

1. Vocabulaire

a. Définition

Un vecteur est caractérisé par 3 choses :

- son sens (de A vers B)
- sa direction (direction de la droite)
- sa longueur (norme)

En particulier, un vecteur est plus qu'une droite, plus qu'une longueur et il ne faut pas mélanger les vecteurs avec les droites ou avec les longueurs.

L'utilité des vecteurs est entre autres de montrer :

- qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) ;
- que trois points A , B et C sont alignés (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires) ;
- un point appartient à une droite (voir le point précédent) ;
- que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires) ;

b. Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AC}$$

La dernière égalité s'obtient en factorisant par k .



Attention à la bonne utilisation de la relation :

- il faut le même coefficient devant les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ pour pouvoir réduire leur somme en un seul vecteur ;
- L'ordre des « lettres » (points) est très important.

La relation peut s'utiliser dans les deux sens, ce qui permet de :

- simplifier des égalités ;
- décomposer des vecteurs.

Elle s'utilise souvent quand il s'agit d'exprimer un vecteur en fonction d'un (ou de plusieurs) vecteur(s) imposé(s).

c. Colinéarité

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, ce qui revient à dire que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour le démontrer :

- Dans le cadre géométrique pur, en utilisant les propriétés géométriques du problème et la relation de Chasles pour exprimer un vecteur en fonction de l'autre ;
- Dans le cadre d'un repère, par simple calcul avec la relation $(xy' - x'y = 0)$, qui revient à vérifier la proportionnalité des coordonnées $\left(\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}\right)$.

Méthode Montrer que deux droites sont parallèles revient à montrer que les vecteurs directeurs sont colinéaires.

VII. Géométrie dans l'espace

1. Appartenance, inclusion

- Un point appartient à une droite, à un plan.
- Une droite est incluse (ou contenue) dans un plan.
- Un point peut être l'origine (ou l'extrémité) d'un vecteur.

2. Intersection, parallélisme

- Une droite peut être sécante avec un plan ; l'intersection est alors un point.
- Deux plans peuvent être sécants ; l'intersection est alors une droite.



On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles ; on dit qu'ils sont colinéaires.

3. Coplanarité

- Des points sont coplanaires s'il existe un plan qui les contient ; trois points sont nécessairement coplanaires.

4. Détermination de droites et de plans

Une droite est déterminée au choix par :

- Deux points A et B ; $\overrightarrow{AB}$ est alors un vecteur directeur ;
- Un point et un vecteur (directeur) ;

Un plan est déterminé au choix par :

- 3 points non alignés A , B et C ;
- 2 droites sécantes ;
- 2 droites parallèles distinctes ;

VIII. Trigonométrie

Pour résoudre un exercice utilisant la trigonométrie, penser à faire un **cercle trigonométrique**. On rappelle que le cercle trigonométrique a pour rayon 1 et que son périmètre mesure 2π .

Grâce au cercle trigonométrique, il faut savoir :

- placer les angles courants (multiples de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et π),
- retrouver les valeurs des cosinus et sinus des angles courants.

Les mesures en degré et les mesures en radian sont proportionnelles.

Soit d la mesure en degrés d'un angle et x sa mesure en radian, alors $x = d \times \frac{\pi}{180}$.

IX. Algorithmes

Certains des algorithmes qui ont été vus (et sont à (re)connaître) sont les suivants :

1. Fonctions

Algorithme de dichotomie.

2. Équations

de la forme $az^2 + bz + c = 0$, résolution dans $\mathbb{C}$.