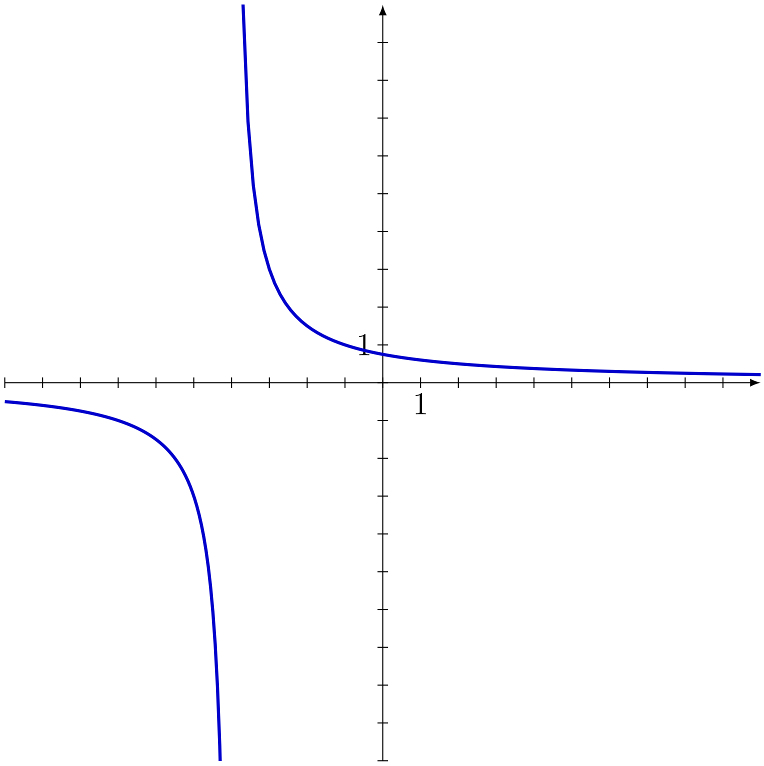
Représentation d'une suite récurrente

∽

Une suite récurrente simple est définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction associée à la suite.

Par exemple, considérons la suite u définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 4}$.

La fonction associée est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x+4}$ (on a bien $f(u_n) = \dfrac{3}{u_n+4}$) représentée ci-dessous :

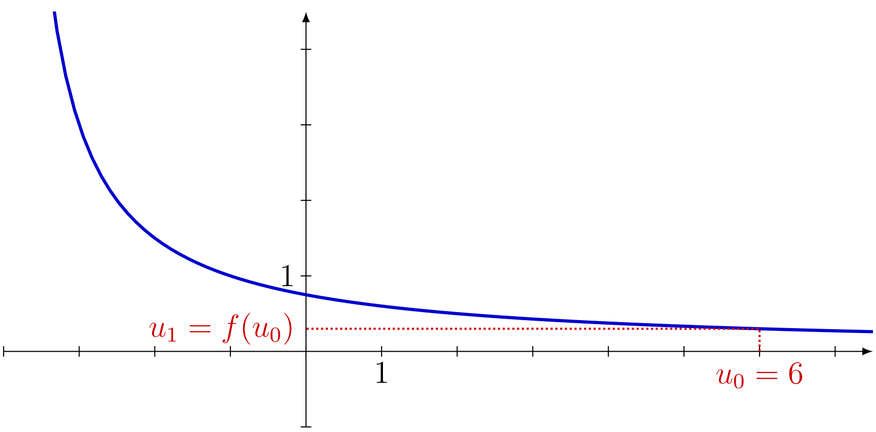


En remplaçant n par 0, on a : $u_1 = f(u_0) = \dfrac{3}{u_0+4}$.

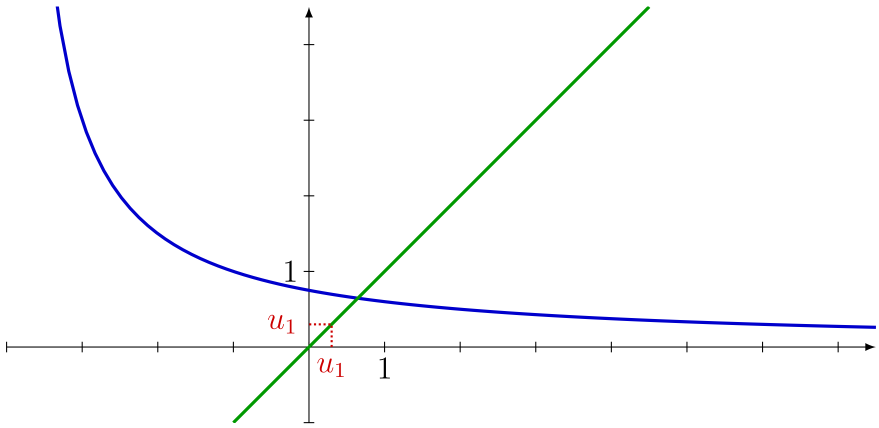
D'après le cours de seconde, $(u_0; f(u_0))$, donc (u_0,u_1), sont les coordonnées d'un point de la courbe.

Le nombre u_0 est l'antécédent, on le place donc sur l'axe des abscisses.

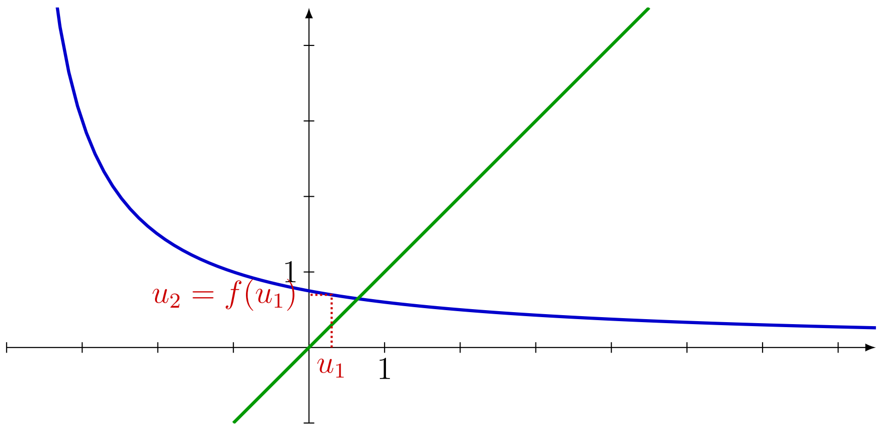
Le nombre $u_1 = f(u_0)$ est l'image, on l'obtient sur l'axe des ordonnées par lecture graphique :



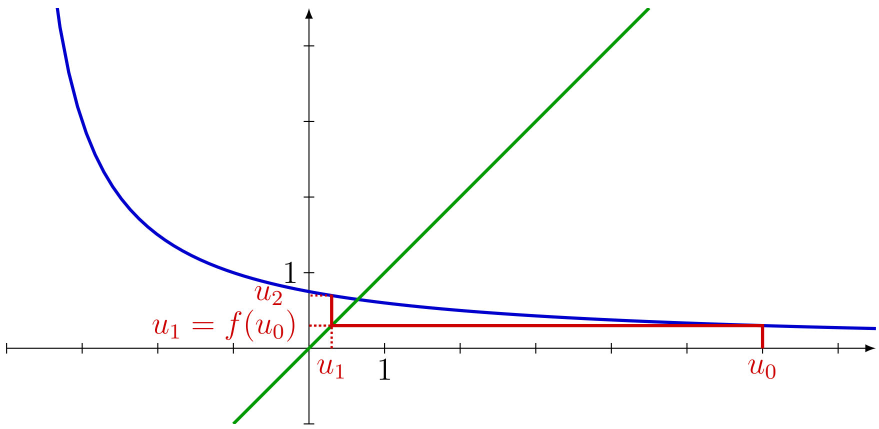
En remplaçant n par 1, on a : $u_2 = f(u_1)$.
Ici encore, $(u_1; u_2)$ sont les coordonnées d'un point de la courbe.
Le nombre u_1 est l'antécédent ; on le place sur l'axe des abscisses.
Le nombre $u_2 = f(u_1)$ est l'image, que l'on lit sur l'axe des ordonnées.
Or, nous avons lu u_1 sur l'axe des ordonnées et il faut maintenant le placer sur l'axe des abscisses.
On utilise pour cela la droite d'équation $y = x$. Tout point de cette droite a une abscisse et une ordonnée égales. Voici la construction :



On peut maintenant placer u_2, image de u_1, par lecture graphique :



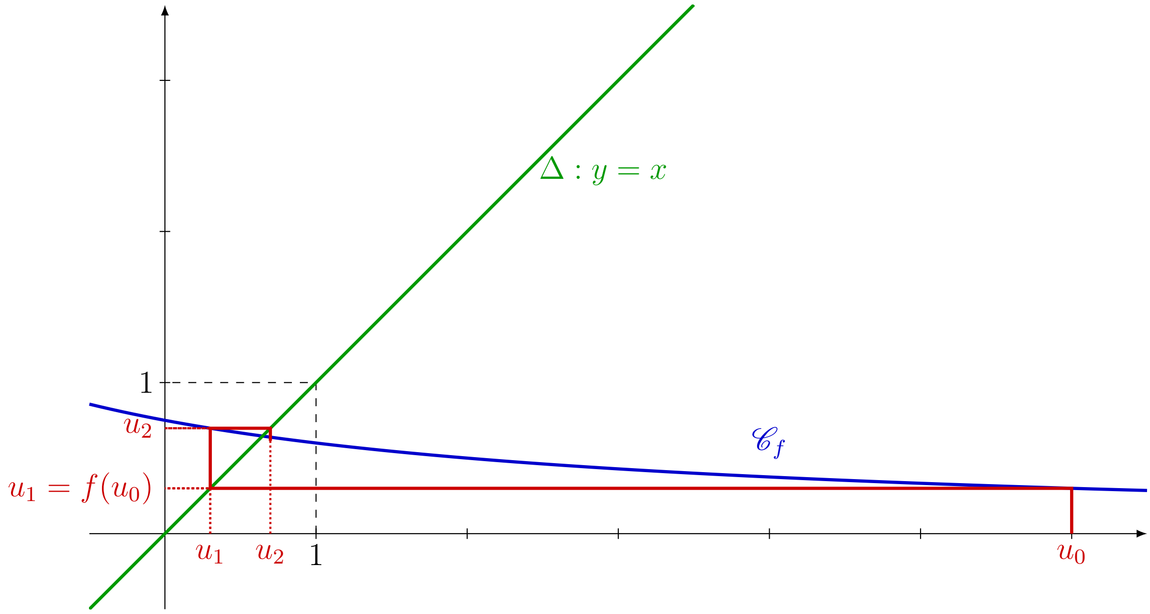
Globalement, on a alors fait le tracé suivant :



On continue ainsi en :

- reportant u_2 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$;
- lisant u_3, image de u_2 à l'aide de la courbe.

et ainsi de suite, ce qui donne (en agrandissant les unités) :

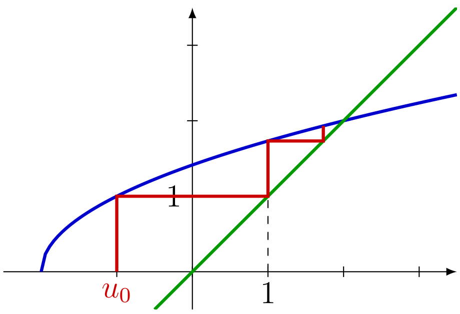


On peut retenir que la construction (de la ligne rouge pleine) se fait de la manière suivante :

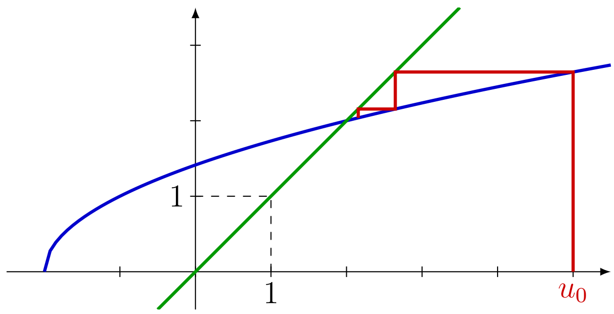
- On commence sur l'axe des abscisses où l'on place le premier terme u_0 ;
- On se déplace **verticalement** vers la courbe $\mathscr{C}_f$;
- On se déplace **horizontalement** vers la droite Δ d'équation $y = x$;
- On répète les deux points précédents autant que souhaité.

Classiquement, on rencontre un certain nombre de représentations de suites récurrentes :

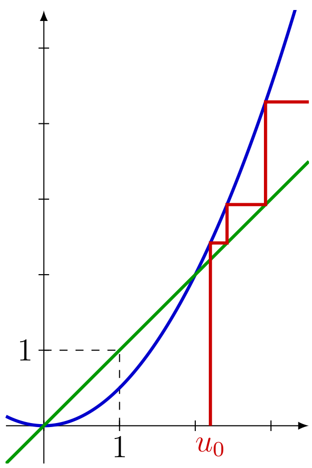
- Les représentation « **en escalier** » (associées aux fonctions croissantes) :



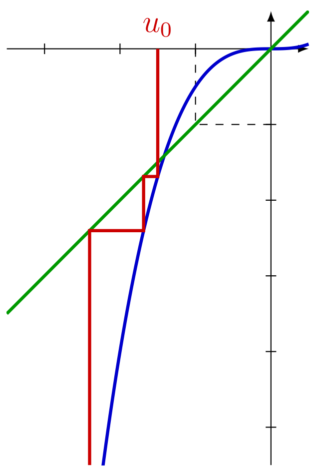
une suite croissante convergente
$u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$



une suite décroissante convergente
$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

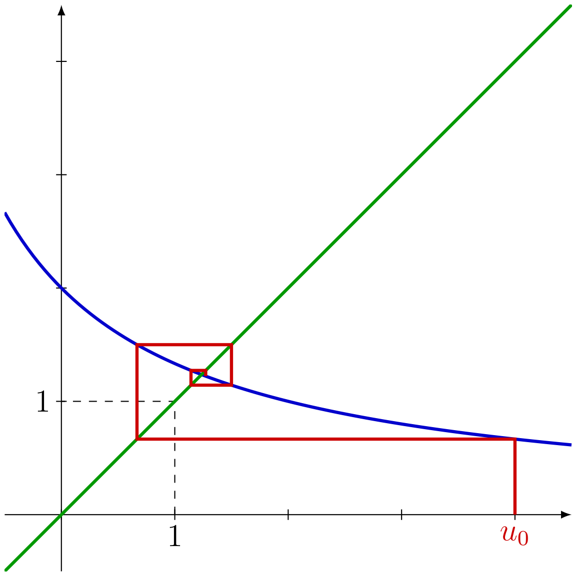


une suite croissante divergente
$u_0 = 2{,}2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}{u_n}^2$



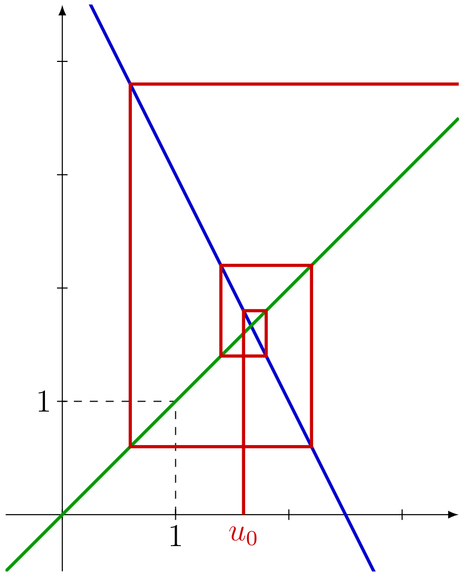
une suite décroissante divergente
$u_0 = -1{,}5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}{u_n}^3$

- Les représentations « **en escargot** » (qui sont associées aux fonctions décroissantes) :



une suite convergente

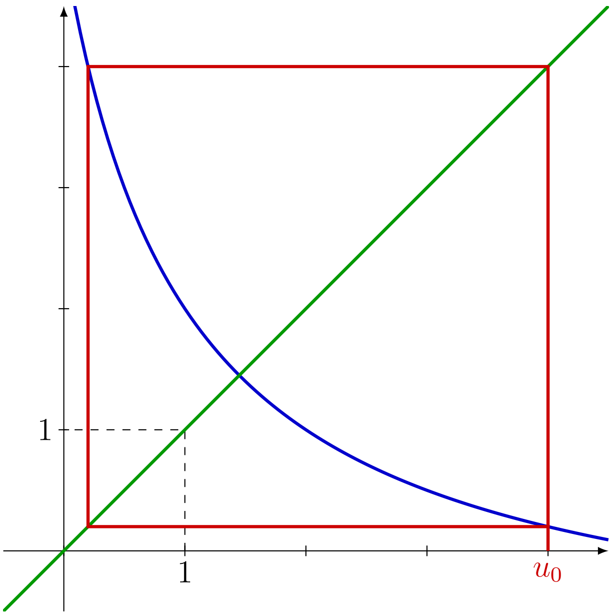
$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4}{u_n + 2}$



une suite divergente

$u_0 = \dfrac{8}{5}$ et $u_{n+1} = 5 - 2u_n$

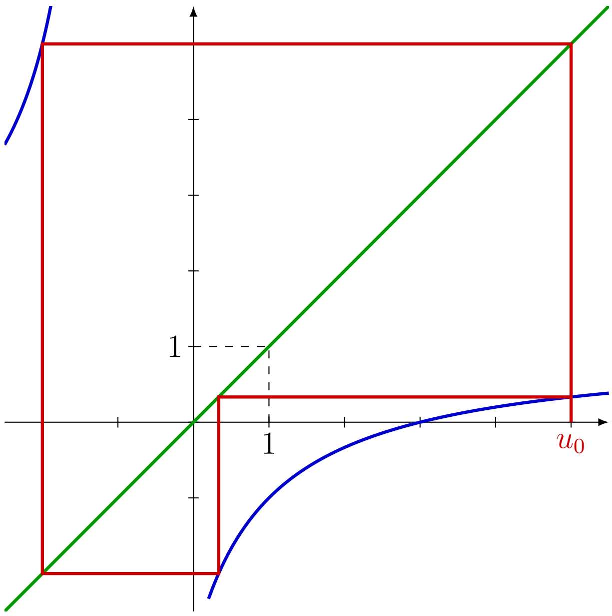
- Des suites **périodiques** :



une suite de période 2

$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{5 - u_n}{u_n + 1}$

$u_1 = 0{,}2 \qquad u_2 = 4 \ldots$



une suite de période 3

$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

$u_1 = \dfrac{1}{3} \qquad u_2 = -2 \qquad u_3 = 5 \ldots$