Soit à résoudre le problème suivant des olympiades internationales de 2009 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \mapsto \mathbb{N}^\star$ telles que pour tout a et b dans $\mathbb{N}^\star$, il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont :

$$a, \qquad f(b) \quad \text{et} \quad f\left(b + f(a) - 1\right)$$

La contrainte du triangle non aplati se traduit par le fait que pour tout a et b dans $\mathbb{N}^\star$,

$$f\left(b + f(a) - 1\right) < a + f(b), \quad a < f(b) + f\left(b + f(a) - 1\right) \quad \text{et} \quad f(b) < a + f\left(b + f(a) - 1\right)$$

Et donc

$$f\left(b + f(a) - 1\right) - a < f(b) < f\left(b + f(a) - 1\right) + a \quad (I_1)$$

Et

$$a - f(b) < f\left(b + f(a) - 1\right) < a + f(b) \quad (I_2)$$

Appliquons (I_1) avec $a = 1$: $f\left(b + f(1) - 1\right) - 1 < f(b) < f\left(b + f(1) - 1\right) + 1$.
Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, on a nécessairement $f(b) = f\left(b + f(1) - 1\right) \quad (E_1)$.
Supposons que $f(1) > 2$ et notons $k = f(1) - 1 > 0$. Alors (E_1), vraie pour tout $b \in \mathbb{N}^\star$, nous indique que f est périodique de période k. Ainsi, f ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc un entier M, valeur maximale prise par f. Alors la contrainte du triangle non aplati, appliquée à $a = 2M$ et $b = 1$ (notons que le choix de b n'a pas d'importance), impose que

$$2M < f(1) + f\left(1 + f(2M) - 1\right) = f(1) + f(f(2M))$$

Or, $f(1) \leq M$ et $f(f(2M)) \leq M$, donc $2M < 2M$, ce qui est absurde. On a donc nécéssairement $f(1) = 1$.
Appliquons (I_2) avec $b = 1$:

$$a - f(1) < f\left(1 + f(a) - 1\right) < a + f(1)$$

et comme $f(1) = 1$, $a - 1 < f(f(a)) < a + 1$. Ainsi donc, quel que soit $a \in \mathbb{N}^\star$, $a = f(f(a))$. Ceci implique que 1 est l'unique entier qui a pour image 1. En effet, si il existe un entier a tel que $f(a) = 1$, alors nécessairement $a = f(f(a)) = f(1) = 1$.
Notons $\beta = f(2)$. D'après le paragraphe précédent, $f(\beta) = 2$ et $\beta \neq 1$.
Prouvons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $f(n) = (n-1)\beta - (n-2)$.

- Initialisation avec $n = 1$: on doit prouver que $f(1) = (1-1)\beta - (1-2)$, soit $f(1) = 1$. Ceci a déjà été démontré.
- Soit $n \geq 1$, supposons (hypothèse de récurrence) que pour tout $m \geq 1$ tel que $m \leq n$, $f(m) = (m-1)\beta - (m-2)$. Prouvons que $f(n+1) = n\beta - (n-1)$.
  Appliquons l'inégalité de droite de (I_2) avec $a = n$ et $b = \beta$:

  $$f\left(\beta + f(n) - 1\right) < n + f(\beta)$$

  soit en calculant les valeurs, $f(n\beta - (n-1)) < n+2$. Il y a alors deux possibilités : $f(n\beta - (n-1)) \leq n$ ou $f(n\beta - (n-1)) = n + 1$.
  - Si $f(n\beta - (n-1)) \leq n$, alors soit $m \leq n$ tel que $f(n\beta - (n-1)) = m$. En appliquant f et l'hypothèse de récurrence on a $n\beta - (n-1) = f(m) = (m-1)\beta - (m-2)$, et l'on obtient l'égalité $(n+1-m)(\beta - 1) = 0$. Comme $m \leq n$, on a $n + 1 - m \neq 0$ et donc $\beta = 1$, ce qui est impossible.
  - Ainsi donc, $f(n\beta - (n-1)) = n + 1$, c'est à dire $n\beta - (n-1) = f(n+1)$.

On peut alors écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f(n) = (\beta - 1)n + (2 - \beta)$. f est donc une fonction affine de coefficient directeur $\beta - 1 > 0$. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante. Or, si $\beta > 2$, c'est à dire si $f(1) < 2 < f(2)$, alors 2 n'est pas dans l'image de f. Ce qui contredit le fait que $f(f(2)) = 2$. Donc $\beta = 2$ et pour tout $n \geq 1$, $f(n) = (2-1)n + (2-2) = n$
Il existe donc une unique fonction f solution du problème, il s'agit de la fonction identité.