Données : Un cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle ABC. Pour tout point M de $\mathcal{C}$ un point G_M, barycentre des points pondérés (A, MA), (B, MB) et (C, MC).

But : Prouver que l'ensemble des points G_M quand M parcourt $\mathcal{C}$ est un triangle.

Preuve (idée $\pm$ détaillée) : Pour tout point M_0 de $\mathcal{C}$ et tout point N du plan, on a par définition :

$$M_0A \cdot \overrightarrow{NA} + M_0B \cdot \overrightarrow{NB} + M_0C \cdot \overrightarrow{NC} = (M_0A + M_0B + M_0C)\overrightarrow{NG_{M_0}} \quad (1)$$

Soit M un point de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ de $\mathcal{C}$.
Appliquons l'égalité vectorielle (1) :
– avec $M_0 = A$ et $N = M$. On obtient $(AA = 0)$:

$$AB \cdot \overrightarrow{MB} + AC \cdot \overrightarrow{MC} = (AB + AC)\overrightarrow{MG_A} \quad (2)$$

– avec $M_0 = B$ et $N = M$. On obtient $(BB = 0)$:

$$BA \cdot \overrightarrow{MA} + BC \cdot \overrightarrow{MC} = (BA + BC)\overrightarrow{MG_B} \quad (3)$$

En multipliant (2) par $BA + BC$ et (3) par $AB + AC$, puis en soustrayant les deux équations obtenues et en utilisant la relation de Chasles suivante : $\overrightarrow{G_AM} + \overrightarrow{MG_B} = \overrightarrow{G_AG_B}$, on obtient, suite à un petit effort de cinq lignes de simplification (utilisant Chasles) puis une division par AB :

$$\frac{(AB + AC)(BA + BC)}{AB}\overrightarrow{G_AG_B} = AB \cdot \overrightarrow{BA} + BC \cdot \overrightarrow{BC} + AC \cdot \overrightarrow{CA} \quad (4)$$

Ce qui est une expression assez agréable, n'est-ce pas ?
Nous noterons $G_M = G$ pour éviter des problèmes liées à des notations diffféntes sur le brouillon recopié.
On souhaite prouver qu'il existe un réel k tel que

$$k\overrightarrow{G_AG} = \overrightarrow{G_AG_B}$$

Ce qui permettra d'établir que quand M est sur un des arcs de cercle (ici $\widehat{AB}$), le point G est sur une droite (ici (G_AG_B))
Appliquons l'égalité vectorielle (1) avec $M_0 = M$ et $N = G_A$, et faisons apparaître B par des relations de Chasles dans les termes de gauche. On obtient :

$$(MA + MB + MC)\overrightarrow{G_AB} + MA \cdot \overrightarrow{BA} + MC \cdot \overrightarrow{BC} = (MA + MB + BC)\overrightarrow{G_AG} \quad (5)$$

En utilisant (2) avec $M = B$, on a :

$$(AB + AC)\overrightarrow{G_AB} = AC \cdot \overrightarrow{CB} \quad (6)$$

En utilisant ça dans (5) (que l'on multiplie par $(AB + AC)$), puis en utilisant Chasles pour simplifier, on trouve :

$$\begin{aligned}(AB+AC)(MA+MB+BC)\overrightarrow{G_AG} &= MA\cdot AC\cdot\overrightarrow{CA}+MB\cdot AC\cdot\overrightarrow{CB}\\ &+ MC\cdot AB\cdot\overrightarrow{BC}+AB\cdot MA\cdot\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(AB+AC)(MA+MB+BC)\overrightarrow{G_AG} &= MA\cdot AB\cdot\overrightarrow{BA} && (7)\\ &+ (MC\cdot AB-MB\cdot AC)\overrightarrow{BC} && (8)\\ &+ MA\cdot AC\cdot\overrightarrow{CA} && (9)\end{aligned}$$

En revoyant à nouveau (4), et en se remettant en tête l'égalité vectorielle que l'on veut prouver, on se dit alors qu'il serait bien que l'on ait en fait

$$MC\cdot AB-MB\cdot AC=MA\cdot BC$$

c'est à dire

$$MC\cdot AB = MB\cdot AC+MA\cdot BC \tag{10}$$

Car alors l'expression de droite de (7,8,9) serait égale à l'expression de droite de (4) multipliée par MA, et donc nous aurions (en mettant toutes les longueurs à gauche) :

$$\frac{AB}{AB+BC}\cdot\frac{MA+MB+MC}{MA}\overrightarrow{G_AG} = \overrightarrow{G_AG_B} \tag{11}$$

Or, l'égalité (10) est vraie grâce au théorème de Ptolémée, car $AMBC$ est un quadrilatère inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$, et donc le produit des longueurs de ses diagonales est égale à la somme des produits des longueurs de ses côtés opposés.
Mais en fait l'égalité (11) avec tout à gauche est une mauvaise idée, alors on met tout ça de l'autre côté :

$$\overrightarrow{G_AG} = \frac{AB+BC}{AB}\cdot\frac{MA}{MA+MB+MC}\overrightarrow{G_AG_B} \tag{12}$$

Si $M=A$, $\overrightarrow{G_AG}=\overrightarrow{0}$ donc $G=G_A$. Si $M=B$, $\overrightarrow{G_AG}=\overrightarrow{G_AG_B}$ donc $G=G_B$
Pour prouver que l'on a bien un segment (puis par la suite, par recollement, un triangle), il suffit de prouver que quand M parcourt l'arc de cercle entre A et B, le coefficient prend toutes les valeurs entre 0 et 1.
En fait, on peut considérer une fonction continue (non explicitée) de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ qui donne ce coefficient. Cette fonction est la composée d'une fonction donnant le coefficient étant donné un point du plan ($\mathbb{R}^2$) par une fonction (qui utilise les distances) dont l'image est l'arc de cercle (courbe).
On utilise le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction prenant comme nous l'avons vu les valeurs 0 et 1, elle prend toutes les valeurs intermédiaires.
Or, 0 est nécessairement minimale (ce sont des produits et quotients de distances). Mais 1 est bien maximale. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder comment cela pourrait être vrai, et d'utiliser cette belle égalité (10).