Redex se réduisant à lui-même

En lambda calcul pur le redex $(\delta)\delta$ est le seul qui se réduit à lui-même.

En effet, prenons a et b des termes vérifiant

$$(\lambda x.a)b \to a[x := b] = (\lambda x.a)b$$

notons na le nombre de λ dans a , nb le nombre de λ dans b, et k le nombre de x dans a. Alors le nombre de λ dans le terme est :

$$1 + na + nb = na + k * nb$$

Donc $(k-1)nb = 1$ soit comme ce sont des entiers naturels $k = 2$ et $nb = 1$.

Soit fb le nombre d'apparition d'une variable libre quelconque ou d'une constante dans b, soit fa le nombre d'apparition de ce même élément (différent de x donc) dans a. Alors le nombre d'apparition de cet élément dans le terme est :

$$fa + fb = fa + k * fb$$

Donc $fb = 0$.

Soit pa le nombre d'applications dans a (nombre de (..).. dans a), soit pb le nombre d'applications dans b. Alors le nombre d'applications dans le terme est

$$1 + pa + pb = pa + k * pb$$

Donc pb=1.

Ainsi b n'a pas de variables libres, pas de constante, contient un λ et une application. Le terme b est alors nécessairement $\lambda x.(x)x$

Supposons que a soit différent de $(x)x$, et soit ba le nombre d'apparition de $(x)x$ comme sous-terme de a. Alors le nombre d'apparition de $(x)x$ dans le terme est (puisque $a \neq (x)x$) :

$$ba + 1 = ba + 2$$

Donc $1 = 2$ ce qui est absurde. Ainsi $a = (x)x$ et le terme est $(\delta)\delta$

Nous aurions pu aussi compter les redex, en utilisant le nombre d'apparition de x appliqué ((x).. sous-terme) dans a. Alors comme $k = 2$, cela nous conduit au fait que x apparaît une fois appliqué, et une fois non appliqué.