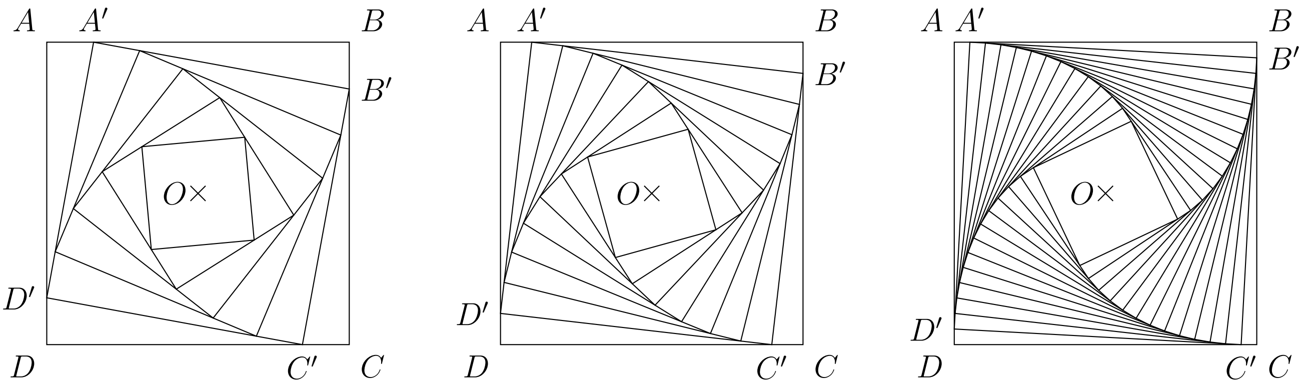
THÉVENON Patrick - YAHYA Mohamed

Mini-projet : Polygones

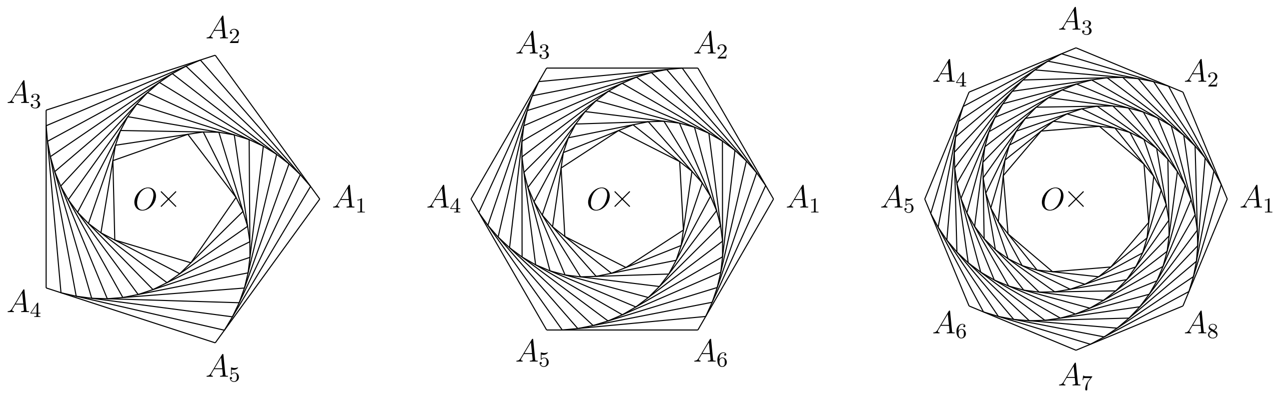
Présentation du sujet

Problème issu de l'observation : On trace un carré $ABCD$ de centre O. Sur $[AB]$, près de A, on prend un point A', sommet d'un nouveau carré $A'B'C'D'$ de centre O tel que les sommets se trouvent sur les côtés de $ABCD$.
On trace un troisième carré à partir du second par la même méthode, et ainsi de suite, jusqu'à ce que les carrés soient assez nombreux pour voir que le sommet initial A décrit une courbe particulière par ces transformations successives.
Lorsque le point proche du sommet (A') tend vers le sommet (A), la courbe tend à être lisse :



Question : quelle est l'équation de cette courbe limite ?

Question plus générale : quelle est l'équation de la courbe créée par le sommet d'un polygone régulier à n côtés de centre O subissant le même type de transformation ?



Que peut-on alors dire pour un cercle de centre O ?

Plan pour la suite

Nous avons trois réponses à fournir, qui donnent la même solution, mais qui sont de longueurs inégales et de principes légèrement différents : Deux solutions analytiques et une solution vectorielle utilisant les nombres complexes.
Nous donnerons d'abord les solutions analytiques. La première sera exposée plus en détail, la seconde ayant des points communs. La troisième solution prendra des hypothèses pour simplifier les calculs. À noter, dans sa résolution, la rotation se fait dans l'autre sens que pour les solutions analytiques, ce qui change le domaine de validité de la courbe.

Première solution analytique

Équation d'une droite en coordonnées polaires

L'équation d'une droite en coordonnées cartésiennes est $ax + by + c = O$.
Or, en coordonnées polaires, $x = r\cos\phi$ et $y = r\sin\phi$.
En remplaçant :

$$ar\cos\phi + br\sin\phi + c = O$$

Il vient alors :

$$r = \frac{-c}{a\cos\phi + b\sin\phi}$$

supposons $b \neq 0$ (soit que la droite n'est pas verticale) et définissons $B = -c/b$ et $A = -a/b$.
Alors :

$$r = \frac{B}{\sin\phi - A\cos\phi}$$

Recherche d'une équation différentielle

Nous considérons le cas général des transformations d'un polygone à n côtés. Soit S un point de la courbe que nous recherchons. S est donc le sommet d'un polygone à n côtés, de centre O, définit par des transformations décrites dans le sujet. Posons que S se trouve aux coordonnées polaires (ρ, θ).
Le point S' de coordonnées $(\rho, \theta - \frac{2\pi}{n})$ est alors un sommet consécutif à S. Soit $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.
Cherchons l'équation de la droite (SS') que nous pouvons supposer non verticale. Nous avons donc :

$$\rho = \frac{B}{\sin\theta - A\cos\theta} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{B}{\sin(\theta-\alpha) - A\cos(\theta-\alpha)}$$

soit deux équations à deux inconnues à résoudre. On trouve A et B en fonction de ρ, θ et α :

$$A = \frac{\sin(\theta-\alpha) - \sin\theta}{\cos(\theta-\alpha) - \cos\theta}$$

et

$$B = \rho\frac{\sin\theta\cos(\theta-\alpha) - \sin(\theta-a)cos\theta}{\cos(\theta-\alpha) - \cos\theta} = \rho\frac{\sin\alpha}{\cos(\theta-\alpha) - cos\theta}$$

L'équation du côté du polygone est alors :

$$\begin{aligned} r(\phi) &= \frac{B}{\sin\phi - A\cos\phi} \\ &= \rho\frac{\sin\alpha}{(\cos(\theta-\alpha) - \cos\theta)\sin\phi - (\sin(\theta-\alpha) - \sin\theta)\cos\phi} \end{aligned}$$

Pour écrire l'équation différentielle, si l'on pose $r(\theta + \delta\theta) = \rho + \delta\rho$, nous formons :

$$\frac{r(\theta+\delta\theta) - r(\theta)}{\theta + \delta\theta - \theta} = \frac{(\rho+\delta\rho) - \rho}{\delta\theta} = \frac{\delta\rho}{\delta\theta}$$

qui est, lorsque $\delta\theta$ tend vers zéro, la dérivée de l'équation de notre courbe.
En utilisant les formules suivantes :

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

pour simplifier, on trouve finalement :

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\rho}{\delta\theta} &= \rho\frac{\sin d\theta}{\delta\theta}\frac{1-\cos\alpha}{\cos\delta\theta\sin\alpha+\sin\delta\theta(\cos\alpha-1)} \\
&\quad +\rho\frac{1-\cos\delta\theta}{\delta\theta}\frac{\sin\alpha}{\cos\delta\theta\sin\alpha+\sin\delta\theta(\cos\alpha-1)}
\end{aligned}
$$

et grâce aux limites connues, si l'on pose ρ' la dérivée de ρ par rapport à θ :

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\rho}{\delta\theta} = \rho\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \rho'$$

On peut montrer que $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan(\alpha/2)$ pour tout α (fonction prolongeable en 0).
Nous avons donc obtenu notre équation différentielle :

$$\rho' = \tan(\alpha/2)\rho$$

Solution générale

La solution assez évidente de l'équation différentielle est : $\rho(\theta) = C\,\mathrm{e}^{\theta\tan(\alpha/2)}$,
C étant une constante à déterminer en fonction des données initiales.
En posant $\rho(\theta_0) = \rho_0$, alors, avec $\alpha = 2\pi/n$:

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{\rho_0}{\mathrm{e}^{\theta_0\tan(\pi/n)}}\,\mathrm{e}^{\theta\tan(\pi/n)}}$$

Cas particuliers

Nous pouvons alors répondre aux questions qui sont des cas particuliers :

- Pour le carré, $n = 4$.
  Si pour $\theta_0 = 3\pi/4$, $\rho_0 = 2/\sqrt{2}$ (carré de côté 2), alors $\tan(\pi/n) = \tan(\pi/4) = 1$ et :

  $$\rho(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi}\,\mathrm{e}^{\theta}$$

  le domaine de définition de la courbe est $]-\infty, 3\pi/4]$, la variation de θ étant négative.
- Pour le cercle, on peut revenir à l'équation différentielle :

  $$\rho' = \rho\tan(2\pi/n)$$

  Lorsque l'on considère qu'un cercle est un polygone régulier qui a une infinité de côtés il suffit de faire tendre n vers l'infini. Alors l'équation différentielle devient :

  $$\rho' = 0$$

  Soit $\rho(\theta) = R$ avec R une constante, qui est le rayon du cercle.
  Donc la courbe n'est plus exponentielle : Pour le cercle, la transformation est l'identité.

Seconde solution analytique

Dans un cas général, en coordonnées polaires, nous avons :

$$y = \rho \sin\theta \Rightarrow dy = \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta$$
$$x = \rho \cos\theta \Rightarrow dx = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta$$

Et en notant $\rho' = d\rho/d\theta$:

$$dy/dx = \frac{\tan\theta + \rho/\rho'}{1 - \tan\theta\rho/\rho'}$$

D'autre part, dans notre problème, si nous prenons un point $M(\rho, \theta)$ de la courbe, ce point est le sommet d'un polygone régulier a n côtés de centre O dont un sommet consécutif est $M'(\rho, \theta - \alpha)$ avec $\alpha = 2\pi/n$. Le coefficient directeur de ce côté est donné par :

$$dy/dx = tan(\theta - \alpha/2 + \pi/2)$$

En utilisant la formule : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, avec $a = \theta$ et $b = -\alpha/2 + \pi/2$, nous obtenons :

$$dy/dx = \frac{\tan\theta + \tan(\pi/2 - \alpha/2)}{1 - \tan\theta\tan(\pi/2 - \alpha/2)} = \frac{\tan\theta + \rho/\rho'}{1 - \tan\theta\rho/\rho'}$$

Par identification, nous obtenons alors :

$$\rho/\rho' = \tan(\pi/2 - \alpha/2) = 1/\tan(\alpha/2)$$

Soit

$$\rho/\rho' = 1/\tan(\alpha/2)$$

Nous retrouvons alors la même équation différentielle que dans la première solution, donc le même résultat.

Solution vectorielle/complexe

On considère le cas général d'un polygone à n côtés. Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct (O, x, y). Le polygone est inscrit dans un cercle de centre $(0, 0)$ qu'on peut supposer de rayon 1, tel que l'un des sommets du polygone est situé en $(1, 0)$.
Soit $M(0)$ ce point et $N(0)$ le point $R(M(0))$ où R est la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 2\pi/n$. ($N(0)$ est le sommet consécutif à $M(0)$),
On construit $M(n+1)$ à partir de $M(n)$ en écrivant que si $N(n) = R(M(n))$, alors on a :

$$\overrightarrow{M(n)M(n+1)} = a\overrightarrow{M(n)N(n)}$$

avec $0 < a < 1$
Passons en complexes.
Soit $Z(n)$ l'affixe de $M(n)$, alors $Z(0) = 1$ et $Z(n+1) = bZ(n)$ avec $b = 1 + a(\mathrm{e}^{ia} - 1)$,
En effet, d'après l'égalité vectorielle, $Z(n) - Z(n+1) = a - (Z(n) - z(N(n))$, avec $z(N(n))$ affixe de $N(n)$.
Alors

$$\begin{aligned} Z(n+1) &= Z(n) - a(Z(n) - z(N(n)) \\ &= Z(n)(1 - a(1 - z(N(n))/Z(n))) \\ &= Z(n)(1 + a(z(N(n))/Z(n) - 1)) \end{aligned}$$

Or, $z(N(n)) = \mathrm{e}^{i\alpha}\, Z(n)$ (par rotation).
Nous obtenons alors bien le résultat annoncé.
Un raisonnement simple par récurrence nous donne alors $Z(n) = b^n$.
Passons aux coordonnées polaires (ρ, θ).
En utilisant les résultats connus :

$$z^n = |z|^n\, \mathrm{e}^{in\arg(z)}$$

et

$$\tan(\arg(z)) = b/a \text{ si } z = a + ib$$

On trouve alors, avec θ l'argument de $Z(n)$

$$|Z(n)|^2 = \rho^2 = (1 - 2a(1-a)(1 - \cos\alpha))^2 \text{ et } \theta = n \arctan \frac{a \sin\alpha}{1 + a(\cos\alpha - 1)}$$

En éliminant n en utilisant le logarithme népérien et en calculant la limite quand a tend vers O ($M(n+1)$ tend alors vers $M(n)$) grâce à un développement limite à l'ordre 1, on trouve que la courbe vérifie :

$$\ln(\rho) = -\tan(\alpha/2)\theta$$

(On utilise la même formule que pour la première partie)
Alors :

$$\rho(\theta) = \mathrm{e}^{-\tan(\alpha/2)\theta}$$

C'est l'équation de la courbe créée par M_0.
On peut trouver les mêmes résultats que pour notre première solution, mais ici, la variation de l'angle est positive, et l'ensemble de définition est $[0; +\infty[$, le polygone tournant dans le sens contraire à celui de notre premier cas.