Longueur de réduction gauche

En lambda calcul pur usuel, on ne peut augmenter la longueur de la réduction gauche. En effet, introduisons une nouvelle réduction :

$$\frac{}{x \twoheadrightarrow x} \qquad \frac{t \twoheadrightarrow t'}{\lambda x.t \twoheadrightarrow \lambda x.t'} \qquad \frac{u \twoheadrightarrow u' \quad v \twoheadrightarrow v'}{(u)v \twoheadrightarrow (u')v'} \qquad \frac{}{(\lambda x.u) \twoheadrightarrow u[x := v]}$$

Lemme 1 *Pour tout v, $v \twoheadrightarrow v$ (la réduction est réflexive)*

Preuve : évident $\square$

Lemme 2 *Pour tout t, si $t \rightarrow_\beta t'$ alors $t \twoheadrightarrow t'$*

Preuve : évident $\square$

Donc la β-réduction usuelle est un cas particulier de notre réduction.

Lemme 3 *Pour tous termes u, u', v et variable x,*

$$\textit{si } u \twoheadrightarrow u' \textit{ alors } u[x := v] \twoheadrightarrow u'[x := v]$$

Preuve : Par induction sur la construction de $u \twoheadrightarrow u'$.
Si $u = (\lambda y.\alpha)\beta$ et $u' = \alpha[y := \beta]$ alors

$$\begin{array}{rcl} u[x := v] = ((\lambda y.\alpha)\beta)[x := v] & = & (\lambda y.\alpha[x := v])\beta[x := v] \\ & \twoheadrightarrow & (\alpha[x := v])[y := \beta[x := v]] \\ & = & (\alpha[y := \beta])[x := v] \\ & = & u'[x := v] \end{array}$$

Les autres cas sont évidents ou se font simplement par induction. $\square$

Lemme 4 *Pour tous termes u, v, v' et variable x,*

$$\textit{si } v \twoheadrightarrow v' \textit{ alors } u[x := v] \twoheadrightarrow u[x := v']$$

Preuve : Par induction sur la complexité de u en utilisant la réflexivité de la réduction. $\square$

Définition 1 *Soit t un terme. On note $lg(t)$ la longueur de sa réduction gauche (pour la β-réduction standard)*

Lemme 5 *Soit x une variable et soient v_1, ..., v_n des termes. Alors*

$$lg((x)v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n} lg(v_i)$$

Preuve : évident $\square$

Nous voilà arrivés à l'énoncé principal :

Proposition 1 *Soit t un terme dont la réduction gauche termine. Soit t' un terme.*

$$\textit{Si } t \twoheadrightarrow t' \textit{ alors } lg(t') \leq lg(t)$$

Cette proposition a pour corollaire le résultat qui nous intéresse :

Corollaire 1 *Soit t un terme dont la réduction gauche termine. Soit t' un terme.*

$$\textit{Si } t \to_\beta t' \textit{ alors } lg(t') \leq lg(t)$$

Autrement dit, on ne peut pas augmenter la réduction gauche.

Preuve : Si $t \to_\beta t'$, alors $t \twoheadrightarrow t'$ par un lemme précédent et donc par la proposition $lg(t') \leq lg(t)$. □

Preuve de la proposition : Elle se fait par induction sur le couple

$$(lg(t),\text{construction de } t \twoheadrightarrow t')$$

Regardons la dernière règle permettant d'obtenir $t \twoheadrightarrow t'$.

- Si il s'agit de $\frac{}{t = (\lambda x.u) \twoheadrightarrow t' = u[x := v]}$ il s'agit de la réduction gauche, donc $lg(t') = lg(t) - 1 \leq lg(t)$
- Si il s'agit de $\frac{}{x \twoheadrightarrow x}$ alors $t = t' = x$ et $lg(t) = lg(t') = 0$
- Si il s'agit de $\frac{u \twoheadrightarrow u'}{t = \lambda x.u \twoheadrightarrow t' = \lambda x.u'}$ Alors l'induction termine ($lg(u) = lg(\lambda x.u)$ et le deuxième élément du couple décroit)
- Si il s'agit de la règle d'application $\frac{u_1 \twoheadrightarrow u_1' \quad v_1 \twoheadrightarrow v_1'}{(u_1)v_1 \twoheadrightarrow (u_1')v_1'}$ la prémisse de gauche provient d'une règle. S'il s'agit de la règle d'application, nous regardons la prémisse de gauche de cette règle et ainsi de suite. Comme l'arbre est fini, il existe un noeud pour lequel la règle utilisée à la prémisse de gauche n'est pas cette règle d'application, et donc pour lequel il y a trois cas possibles. Nous noterons $v_1,\ldots,v_n$ et $v_1',\ldots,v_n'$ les termes des prémisses de droite. Alors

  1. Si il s'agit de $\frac{u \twoheadrightarrow u'}{t = \lambda x.u \twoheadrightarrow t' = \lambda x.u'}$ alors par un lemme précédent

     $$u[x := v_n] \twoheadrightarrow u'[x := v_n]$$

     En utilisant la règle d'application on obtient

     $$u[x := v_n]v_{n-1} \ldots v_1 \twoheadrightarrow u'[x := v_n]v_{n-1}' \ldots v_1'$$

     Or

     $$lg(u[x := v_n]v_{n-1} \ldots v_1) < lg((\lambda x.u)v_n v_{n-1} \ldots v_1) = lg(t)$$

     Donc par indution

     $$lg(u'[x := v_n]v_{n-1}' \ldots v_1') \leq lg(u[x := v_n]v_{n-1} \ldots v_1) = lg(t) - 1$$

     Comme $u'[x := v_n'] \twoheadrightarrow u'[x := v_n]$ par un lemme précédent, par induction (puisque la longueur de réduction gauche est strictement plus petite que celle de t) on obtient

     $$lg(u'[x := v_n']v_{n-1}' \ldots v_1') \leq lg(u'[x := v_n]v_{n-1}' \ldots v_1')$$

     Or $lg(u'[x := v_n']v_{n-1}' \ldots v_1') = lg(t') - 1$, d'où le résultat.

2. Si il s'agit de $\overline{x \twoheadrightarrow x}$ alors $lg(t) = lg((x)v_n \ldots v_1) = \sum_{i=1}^{n} lg(v_i)$ par un lemme précédent. Alors pour tout i $lg(v_i) \leq lg(t)$ et comme $v_i \twoheadrightarrow v_i'$ dont la construction est plus courte que celle de $t \twoheadrightarrow t'$ on a $lg(v_i') \leq lg(v_i)$ Ainsi $lg(t') \leq lg(t)$

3. Si il s'agit de $\overline{(\lambda x.u) \twoheadrightarrow u[x := v]}$ alors

$$(\lambda x.u)v_n \ldots v_1 \to_\beta (u[x := v])v_n \ldots v_1$$

avec la réduction gauche donc $lg(((u[x := v])v_n \ldots v_1) < lg(t)$ et comme en appliquant la règle d'application on a

$$(u[x := v])v_n \ldots v_1 \twoheadrightarrow (u[x := v])v_n' \ldots v_1'$$

L'induction nous donne

$$lg(t') = lg((u[x := v])v_n' \ldots v_1' \leq lg((u[x := v])v_n \ldots v_1) < lg(t)$$

La preuve est terminée. □